INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

DESARROLLO DE LA NOCIÓN DE DERIVADA A TRAVÉS DE UN ENFOQUE INTEGRADOR ENTRE LA FÍSICA Y LA MATEMÁTICA.

Tesis que para obtener el grado de
Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Presenta:
José Trujillo Torres

Director de Tesis:
Dr. Apolo Castañeda

México, D. F., octubre de 2007

SIP-14

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

ACTA DE REVISIÓN DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 1 del mes de Noviembre del 2007 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

Desarrollo de la noción de derivada a través de un enfoque integrador entre la física y la matemática

Presentada por la alumna:

TRUJILLO	TORRES	JOSÉ
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro:

A	0	3	0	2	6	7

aspirante al grado de:

Maestría en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACIÓN DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISIÓN REVISORA

Director de tesis

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dra. Gisela Montiel Espinosa

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

CICATA - IPN
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional

Dr. Gustavo Martínez Sierra

M. en C. Juan Gabriel Molina Zavaleta

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
SECRETARÍA DE INVESTIGACIÓN Y POSGRADO

CARTA CESIÓN DE DERECHOS

En la Ciudad de México el día 23 del mes octubre del año 2007, el que suscribe José Trujillo Torres alumno del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro A030367, adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Unidad Legaria, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Apolo Castañeda Alonso y cede los derechos del trabajo intitulado *"Desarrollo de la noción de derivada a través de un enfoque integrador entre la física y la matemática"*, al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin el permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección jtrujillot@ipn.mx. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

José Trujillo Torres

Dedicatoria

Este trabajo de investigación se lo dedico a mi esposa e hijo por todo su apoyo y paciencia, así como a todos y cada uno de mis alumnos.

Agradecimientos

Agradezco a mi adorada esposa por todo su amor, apoyo y confianza depositados en mí durante todos y cada uno de los momentos importantes como éste, a mi hijo por sus comentarios de aliento y comprensión para realizar mis investigaciones, a mis padres por su entusiasmo hacia la vida transmitido a sus hijos, a mis hermanos por sus incondicionales ayudas, al doctor Apolo Castañeda por su gran ayuda, atinados comentarios, paciencia y amistad brindados durante todo este trabajo de investigación, al doctor Javier Lezama y al profesor Arnulfo Ulloa por sus enseñanzas que han estado, siempre, presentes en mí, a mis alumnos por sus participaciones en todo el desarrollo de esta tesis, a mis compañeros profesores por todos los momentos que me han brindado para platicar sobre este trabajo de investigación, y finalmente, no quiero pasar desapercibida la ayuda de doña Elizabeth Mariscal por su gran organización logística, que me mantuvo al pendiente de las necesidades para este trabajo. Muchas gracias a todos.

Índice

INDICE DE FIGURAS

RESUMEN

En constantes y variadas ocasiones se denota, en el estudiante, la desvinculación de sus conocimientos adquiridos en las diferentes asignaturas, es decir no se ayuda de lo que ha aprendido en otras asignaturas para aplicarlo, relacionarlo o vincularlo con la matemática.

Es común que el estudiante no pueda reflejar una secuencia de sus aprendizajes porque no encuentran la relación entre temas anteriores y temas posteriores de una misma asignatura.

En el estudio de las matemáticas no debemos menospreciar las aportaciones de otras asignaturas, así como la vinculación que pueda tener la matemática con éstas o éstas con la matemática. Una de las razones que podemos dar a esta necesidad de vinculación es solventar, de manera inmediata y local, la respuesta que solicitan nuestros estudiantes de bachillerato a preguntas como: ¿para qué estudiamos matemáticas?, ¿para qué estudiamos este tema?, ¿cuál es la intención de estudiar este concepto?, ¿y, esto para qué me va a servir?, etc. La vinculación entre asignaturas nos permite relacionar temas de las diferentes asignaturas, al mismo tiempo y en tiempos escolares, con lo que respondemos a necesidades de la física con matemáticas o a necesidades de la matemática con la física, por ejemplo. También, con la vinculación entre asignaturas, podemos reconsiderar los temas estudiados en la asignatura de física, en tiempos anteriores, para revisarlos en matemáticas en tiempos posteriores o viceversa.

Por otra parte, es necesario mencionar que vivimos en una sociedad globalizada donde el estudiante está inmerso en un cúmulo de información que debe seleccionar en tiempos, normalmente, cortos. Si la vinculación entre asignaturas nos permite relacionar temas de clase, en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, entonces podemos guiar al estudiante a perseguir objetivos comunes, en su preparación académica, dando hincapié a que el alumno ahorre tiempo en hacer propio el conocimiento.

Finalmente, para poder lograr que el conocimiento, que adquiera el estudiante responda a las condiciones de la sociedad debe cumplir una de las características importantes de la enseñanza aprendizaje: los objetivos perseguidos por el estudiante, el profesor, la institución y la sociedad deben tener un fin común, es decir deben estar orientados en la misma línea de cumplimiento. Para lograr lo anterior no debemos olvidar el pensamiento matemático de nuestros estudiantes, sus necesidades, la valoración que se ha formado en él hacia la asignatura o asignaturas (matemáticas, física, o química, etc.), los ambientes escolares que se han manifestado en él, los objetivos que persiguen todas y cada una de las asignaturas que se pretendan vincular con la enseñanza de las matemáticas, los tiempos en que se enseñan cada uno de los temas que se pretenden vincular, la renovación de nuestro compromiso como sociedad hacia la educación, la creación de necesidades de aprendizaje en el estudiante, el trabajo colaborativo entre academias para fortalecer el crecimiento académico de la propia institución, entre otros. Todo lo anterior lo podemos analizar y trabajar en la vinculación entre asignaturas.

Palabras claves: Vinculación, conocimiento, matemáticas, física, aprendizaje, asignaturas, necesidades, temas, tiempos escolares, objetivos, pensamiento matemático, ambientes escolares.

ABSTRACT

In many cases the student lacks of the ability to correlate knowledge they have obtained in different subjects to mathematics.

It is also common for them not to develop a sequence in what they have been learning; they are unable to find the relation among previous and forthcoming topics of the same subject.

In mathematics teaching we mustn't omit the help that other subjects provide; nor the correlation it may have with them. One of the main reasons for this need of linking topics and subjects is to reach immediately and efficiently the answer our students are looking for to some typical questions such as: what is the reason for studying mathematics?, why are we studying these topic?, what is this concept for?, How would I find this helpful in the future?, etc. Correlation between signatures offer us the opportunity to establish some sort of relation among the topics of an the different subjects they are studying at high school level; this let is an explain as well why physics and mathematics keep an extremely tight correlation. Also we can reconsider certain themes which had been seen previously in physics, and revise them again later or viceversa.

In the other hand, it is necessary to mention that nowadays we are living in a globalize society, where the pupils are supposed to assimilate huge amounts of information in really short periods of time. If the correlation among subject let us link class themes in the teaching and learning of mathematics, then we can guide the student to pursue certain goals in their academic life, so they can save time when studying. Also, it is worth

mentioning that students are expecting to be taught interesting, useful and appealing knowledge.

Finally, for being able to assure that the knowledge which the student is getting would be solid and profitable for themselves as well as for society, must have one of the most important characteristics of the teaching-learning model: the objectives sought by the student, professor, institution, and society should have the same purpose, they should be focused on reaching a similar benefit. In order to achieve what we have previously mentioned, we must not forget our students' mathematical thought, needs, the value they give to mathematics and others subjects, the school atmosphere they have been living in the goals each subject seeks, the time in which each topic we want to correlate is being taught , the renounce of our compromise to society towards education, the creation of learning needs in the student, team work among academies to strengthen the institutions academic develop, etc.

Everything we have treated before can be analyzed and managed in the correlation among subjects.

Key words:
Knowledge, correlation, mathematics, physics, learning, subjects, requirements, topics, goals, information, students' mathematical thought, school atmosphere, school times.

INTRODUCCIÓN

El trabajo de investigación ofrece un acercamiento al problema del estudio de la derivada mediante la vinculación entre asignaturas, y en específico la vinculación de la matemática con la física; la matemática en el tema de la derivada y la física con el tema de movimiento.

Se ha considerado para este trabajo de investigación, un tema en específico: la dinámica como herramienta para el tratamiento didáctico de la derivada. Tanto el tema de la derivada como el de dinámica están incluidos dentro del programa de estudios del Instituto Politécnico Nacional, IPN, en el nivel medio superior. Aunado a lo anterior, nuestro estudio analizará, en forma general, los momentos académicos que viven los estudiantes (principalmente) y profesores del nivel medio superior del IPN y de otras escuelas como el CONALEP (por sus siglas Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica); y en forma particular los estudiantes del C. E. C. y T. “Juan de Dios Bátiz Paredes”. Dichos momentos académicos son el reflejo de la observación y análisis de lo que se vive en el aula de clases, en la enseñanza de las matemáticas y de la física.

Algunos profesores y estudiantes han manifestado la inquietud de reconocer a la matemática y a la física de forma vinculada; por ejemplo al estudiar un problema de física en la clase de matemáticas surgen ambientes escolares especiales de interés común; ya que si al estudiante se le pueden presentar alternativas de análisis, su pensamiento matemático lo lleva hacia otro ámbito que normalmente no se vincula, a la deducción de conceptos, a la forma de relacionarlos con su entorno, y dirigiéndolos a situaciones particulares. En forma particular, si un problema físico o matemático permite vincular dichas asignaturas mediante una gráfica, donde el propio estudiante pueda deducir las fórmulas que describen dicho problema, el estudiante tiene la oportunidad de trasladarse de un ambiente matemático a un ambiente físico o viceversa, generalizando su conocimiento. Es decir, si el estudiante revisa el comportamiento de un fenómeno, por ejemplo de manera gráfica, donde surja la fórmula que analiza y determina el comportamiento de dicho fenómeno y observa que en dicho análisis interactúan la física y las matemáticas en temas de aplicación real, permite, al estudiante, cambiar la idea cerrada de que sólo existe una forma de solución para estos problemas; además de intercambiar conceptos de una materia a otra para identificar puntos en común que tienen entre sí.

La posición estática, de poca o nula participación que muestra el estudiante, en el aula de clase, se puede disminuir cuando existe el escenario apropiado en que un problema desencadena nuevas actividades. Es como si para llegar a un lugar, que lo hemos hecho siempre en autobús, ahora lo intentemos por avión. Son experiencias que no se olvidan y que dejan un buen sabor de boca tanto para el estudiante como para el profesor y por ende para el fortalecimiento del conocimiento y crecimiento de la valoración hacia las ciencias, sin embargo no nos quedaremos con esta visión limitada, pues pretendemos destacar los vínculos que pueden establecerse entre la física y la matemática, a través de una situación de aprendizaje.

Finalmente, la vinculación entre asignaturas nos ofrece la oportunidad de integrarnos en equipos de trabajo colaborativo, muy necesarios en nuestra época postmoderna. Generamos, entonces, sociedades de conocimiento integradas y multidisciplinarias, necesarias para los nuevos retos que enfrentan nuestros estudiantes y en general nuestra sociedad.

CAPÍTULO 1

El porqué de la vinculación entre asignaturas para la enseñanza de las matemáticas.

GENERALIDADES

En el estudio de la física como de las matemáticas, en el nivel medio superior, he observado que el estudiante y los profesores generan una inercia de dividir los conocimientos de las diferentes asignaturas; por ejemplo las herramientas (conceptos, desarrollos matemáticos, etc.) de la asignatura de física que no son utilizadas para la enseñanza de las matemáticas o viceversa. Si hablamos del estudiante, pareciera ser que éste no logra vincular sus conocimientos adquiridos de las diferentes asignaturas, es decir no se ayuda de lo que ha aprendido en otras asignaturas para aplicarlo, relacionarlo o vincularlo.

En nuestra cotidianeidad escolar se ha delineado una división del conocimiento, tal vez podríamos justificar este desarrollo "de partición o no vinculación" en nuestro aprendizaje o enseñanza "escolar" por que a través de nuestra historia, desde los antiguos griegos, el ser humano se ha visto en la necesidad de dividir el estudio del extenso campo de la ciencia[1]; por ejemplo, en nuestro caso[2], el estudio de las matemáticas, en el nivel medio superior del Instituto Politécnico Nacional, IPN, ha sido encaminado a la resolución algebraica de ecuaciones y problemas, la memorización y aplicación de fórmulas para resolver operativamente

[1] Ruiz Iglesias, M. Conferencia ofrecida en 2004 en el C. E. C. y T. "Juan de Dios Batiz Paredes".

[2] Principalmente se habla de lo que se vive en el IPN (en forma particular), y de lo que ocurre en las demás instituciones del nivel medio superior de nuestro país (en forma general). Debo mencionar que mi experiencia como docente ha sido tanto dentro del IPN como en otras instituciones (particulares y publicas); tanto en escuelas para estudiantes que se forman académicamente para continuar sus estudios profesionales en escuelas de ingeniería como en escuelas enfocadas a otras formaciones.

integrales y/o derivadas, memorizar teoremas que muchas veces no se vuelven a aplicar, etc., que en muchos casos no refleja una secuencia de las enseñanzas que se ofrecen a los estudiantes, por lo que tenemos como respuesta de nuestros estudiantes, una manifestación de no relación entre contenidos académicos y conocimientos.

En la mayoría de los casos, la división entre temas se da en la misma asignatura, no encuentran la relación entre temas anteriores y temas posteriores, sólo basta recordar algunas de las preguntas que nos hacen nuestros estudiantes: ¿hasta qué tema llegará el examen?, ¿el examen va a incluir este o aquel tema?, ¿incluirán temas pasados para el siguiente examen?, etc.

Lo anterior, se fortalece aún más cuando no vislumbra y/o no permite la intervención de otros conocimientos, de otras asignaturas o de otras ciencias. Sería valioso conocer las diferentes posturas que tiene cada asignatura con un tema o concepto en específico. De ahí la necesidad de organizarse como academias de trabajo para revisar las propuestas de estudio a fin de lograr que sea más enriquecedora la clase de matemáticas[3].

[3] Muy seguramente para realizar esta propuesta debemos tener una infraestructura acorde; ya que como es sabido por propios y extraños, los que nos dedicamos en su totalidad a la docencia, en nuestro país, debemos trabajar en dos o más instituciones para poder vivir dignamente. La falta de tiempo para poder "sentarse" y analizar dichas situaciones es persistente y cada vez se acentúa más en países como el nuestro.

De lo anterior, se deriva la propuesta de vincular y de relacionar conceptos, temas y asignaturas con la intención de mostrar al estudiante que la ciencia es un conjunto de conocimientos, que de acuerdo al contexto[4], situación geográfica, época, ámbito social, etc. donde se encuentre el ser humano, ésta tendrá un desarrollo de refinamiento acompañado de un consenso de validación.

[4] Castañeda, A, 2004. Las investigaciones epistemológicas han reportado que el cálculo no nació de una sola deducción. Fue el resultado de un pensamiento matemático que se inicio dos siglos antes. La creación fue en contextos socioculturales y científicos muy específicos.

Por otra parte, creo necesario, en este momento, citar el comentario hecho por el secretario general de la Organización de los Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura: -los retos que enfrentan muchos países de América Latina para abatir el analfabetismo y mejorar los resultados en lectura y uso de nuevas tecnologías de información conjuntamente con el aprendizaje de las Matemáticas, exigen no solamente reformas educativas sino cambios en las estructuras sociales que favorezcan el avance cultural y la formación de ciudadanos; así lo afirmó para el periodo 2007-2010. Destacó, entre otras cosas, que en algunas de estas naciones existe una escasa oferta a la educación, carencia de un modelo de educación técnico-profesional y bajos niveles de lectura -. Además y aunado a lo anterior, recientemente el director de Temas de Educación de la OCDE, Bernard Hugonnier, explicó que México ha realizado una gran inversión en materia educativa; sin embargo, en comparación con las naciones industrializadas, ese esfuerzo ha sido insuficiente. Tras reconocer los esfuerzos tecnológicos de la Secretaría de Educación pública a través del programa Enciclopedia, aseveró que México tardará mucho tiempo en salir de la primera fase del desarrollo, que se ubica en la franja de los cinco mil a diez mil dólares de ingreso per cápita, “México se encuentra a la mitad de esa fase y saldrá sólo con educación de calidad y con una visión de largo plazo[5].

5 Podemos revisar más sobre esta información en la Gaceta Politécnica número 643 con fecha de 30 de noviembre del 2006. En este articulo, el director general del Instituto Politécnico Nacional hace una convocatoria a rectores para sumarse al Pacto nacional Educativo. En este pacto nacional educativo -se pide que confluyan todas las fuerzas políticas, padres de familia, profesores, sindicatos, legisladores y empresarios para renovar su compromiso con la educación y hacer que se constituya en la vía imprescindible para superar los rezagos del país-.

Conocemos, concretamente en nuestra sociedad, que el problema educativo no está desligado de los problemas sociales y económicos que enfrentamos, lo cual significa una marcada diferencia en relación a otras naciones.

Si reconocemos nuestros objetivos académicos en la formación profesional, estaremos en mejor posibilidad de proponer o generar escenarios de estudio para nuestros cursos de matemáticas. En este caso, creo que dentro de la enseñanza de las matemáticas un aspecto importante dentro de la actuación del profesor, en el aula de clases, es su capacidad de adaptar los contenidos de su enseñanza a las necesidades y características de sus estudiantes, tarea no muy fácil. Es importante reconocer que nuestros estudiantes tienen diferentes necesidades, objetivos, intereses, etc. Además, los tiempos escolares dedicados al estudio de las matemáticas difiere, también, de una institución a otra aunque los temas a cubrir son similares.

Por otra parte, en la actualidad estamos involucrados en una sociedad consumista, donde nuestros estudiantes están recibiendo nueva y variada información; la cual deben revisar y seleccionar, por lo general, en tiempos breves. Muchos de los estudiantes con los que he trabajado me han preguntado en clase -¿y ese tema o esta materia para que me va a servir o en que la voy a utilizar?- Además, debo mencionar que existen exclamaciones y preguntas, también en los estudiantes, como las siguientes: ¡tanto desarrollo para llegar a esto!, ¿no puede hacerse más fácil?, ¿habrá un camino más corto para llegar a la solución?, ¿se tiene que realizar todo esto para llegar al resultado?

En repetidas ocasiones se observa, en los estudiantes, la pérdida de interés en la matemática, esa pérdida de interés en ocasiones va en aumento. Además, si los desarrollos matemáticos cada vez son más extensos en el avance escolar del estudiante y si nosotros damos hincapié a que los estudiantes formen un criterio de demasiado trabajo para la obtención de un resultado "pequeño"; puede entenderse, en el estudiante, su conjetura de algo no redituable.

La matemática que se enseña a los estudiantes es extensa y en muchas ocasiones no consideramos el auxilio de otras herramientas de enseñanza como las herramientas tecnológicas, los equipos didácticos de laboratorio o herramientas de otras asignaturas para poder reducir tiempos y muy seguramente poder enriquecer nuestra práctica docente. Por estas y otras razones, creo que es necesario unir esfuerzos con otras academias y en el seno de la misma academia, en ocasiones se ha observado que en una misma academia hay división y por lo tanto no existe el trabajo en equipo, que como hemos visto es muy necesario en la realización de cualesquier tarea y más, creo yo, en la tarea de la enseñanza. Reitero la necesidad de trabajar en equipo y valorar el quehacer de los demás, así como el de uno mismo.

En mi experiencia, la doble participación en las academias de física y matemáticas me ha dado la oportunidad de visualizar la relación que existe entre los programas de estudio de una ciencia y otra, así como de puntualizar en los estudiantes las necesidades en matemáticas para atender situaciones de física y viceversa. Aunque debo mencionar también, que algunos de los temas propuestos en física necesitan herramientas matemáticas que se les enseñan en tiempos posteriores, es decir también hay la no concordancia en tiempos y espacios en nuestros programas de estudio. Por ejemplo, en tercer semestre nuestro programa de estudios de física se refiere a la revisión del concepto de velocidad instantánea siendo que el estudiante aún no revisa el concepto de derivada; o al iniciar el quinto semestre, al estudiante se le solicita en física la herramienta matemática de la integral cerrada, cuando apenas él está comenzando a revisar, en matemáticas, el concepto de la integral.

Haciendo una retrospectiva propia; cuando yo comencé como profesor a impartir, la materia de física, el tema de velocidad instantánea, lo planteaba utilizando todo el bagaje matemático necesario para explicar el concepto de derivada, inclusive me atrevía a solicitar a los estudiantes que se aprendieran fórmulas de derivación para resolver problemas, obviamente el aprendizaje de los estudiantes era memorístico. Muchos estudiantes, muy seguramente, dejaron de atender este concepto por que no le entendieron o por que no tenía significado para ellos, nuevamente eran sólo fórmulas para memorizar y después usar si las recordaban y más aún si sabían donde y como usarlas[6].

Ahora, citemos una de las relaciones que existen en nuestros programas de estudio de física y matemáticas y que ésta como las demás relaciones entre temas de diferentes asignaturas es necesaria hacérsela saber al estudiante. Es necesario hacer del conocimiento del estudiante las relaciones que existen entre las diferentes asignaturas para formar en él la necesidad de que todo es importante y que tiene razón de ser el enseñar y estudiar ciertos temas en diferentes asignaturas, al mismo tiempo. Los temas revisados en el programa de estudio de geometría analítica, por ejemplo, dedican gran parte de su tiempo a revisar ecuaciones cuadráticas y lineales ya que en física se revisarán, al mismo tiempo, los conceptos de movimiento rectilíneo uniforme y uniformemente acelerado.

[6] El concepto de velocidad instantánea se revisa (física) en el tercer semestre y el concepto de derivada (matemáticas) se revisa un semestre posterior (cuarto semestre).

Por otra parte el manejo conceptual puede generar cierta problemática; usar los términos de rapidez y velocidad instantánea en forma indistinta; como si fueran lo mismo, también, varios textos tanto de matemáticas como de física no hacen dicha diferencia. Algunos de los textos que he revisado y que hablan de rapidez y velocidad en forma indistinta son: a) Halliday. Resnick. Krane. Física volumen 1, México, 1999., b) Serway. Beichner. Tomo 1, Física para ciencias e ingeniería, Quinta edición, México, 2000., c) Mochón, S. El cálculo desde una perspectiva visual y dinámica con actividades en la computadora, Mc Graw Hill, México, 2004., d) Finney. Demana. Waits. Kennedy. Cálculo de una variable, segunda edición, México, 2000. e) Edwards y Penney. Cálculo Diferencial e Integral, cuarta edición, México, 1997. , etc. Pudiera ser que la utilización indistinta de los conceptos velocidad y rapidez en estos textos se deba a la traducción de los mismos, ya que como podemos apreciar la gran mayoría de textos mencionados son de origen estadounidense.

Otras palabras que se usan indistintamente tanto en matemáticas como en física son posición, desplazamiento y distancia.

Debemos estar conscientes de la necesidad de espacios de discusión para los profesores, en el que se logre compartir la experiencia tanto de nuestros colegas de la misma y de otras asignaturas diferentes a la que nosotros impartimos, como la revisión de textos y el análisis del discurso de estos. Estamos conscientes de la poca o nula participación de los profesores para realizar libros de texto e investigación, situación que se vive principalmente por la situación económica de cada sociedad. Lo anterior no es exclusivo para países de América Latina, si no también lo observamos en otras latitudes, por mencionar un ejemplo; en Hungría también utilizan libros estadounidenses, ya que el gobierno de ese país no estimula al profesor que realiza libros, argumentando que esa es una labor que está dentro de las actividades del profesor; sabemos que Hungría tiene gran tradición matemática pero nuevamente el factor económico interviene en el crecimiento y sociabilización del saber matemático. Además y aunado a lo anterior, no olvidemos que estamos viviendo en una sociedad, generalmente, consumista.

A pesar de todo lo anterior, es necesario incrementar nuestro acervo de información científica basada en nuestras experiencias académicas. Debemos tener una retroalimentación vertical y horizontal por parte de la planta docente. No cabe duda que como ya lo mencioné, las necesidades socioculturales, socioeconómicas, etcétera de una comunidad son en gran parte los órganos rectores del proceso enseñanza aprendizaje.

Expongo algunas de las consideraciones que creo debemos tener presentes los profesores que queremos estar involucrados en el proceso de la enseñanza-aprendizaje.

- Es necesario que los profesores intervengan en la investigación académica, como una actividad propia de su quehacer, para promover en sus estudiantes la necesidad de la creatividad.

- Debemos tener presente y hacerlo notar a nuestros estudiantes que la intuición es diferente a la creatividad. Aunque la intuición se pudiera considerar como elemento suficiente para el aprendizaje del alumno sería muy provechoso para nuestra sociedad promover la creatividad en nuestros estudiantes ya que estaríamos en mayores posibilidades de generar nuevos descubrimientos. En este sentido los escenarios de aprendizaje que diseñe el profesor son pieza clave.

- En nuestra sociedad podemos considerar que es más importante repensar y mejorar la forma en que se ofrecen las clases a nuestros alumnos que los propios contenidos que se enseñan. De lo anterior podemos hacer referencia a la siguiente cita: es mejor el espíritu con que se enseña que la enseñanza misma. Cuantas veces no hemos conocido a profesores que son eruditos en su materia pero su público, paulatinamente, se va reduciendo por la forma en que el profesor maneja sus clases. Nuevamente el factor de la creación de selectos escenarios de trabajo es clave.

Por otra parte, me es necesario retomar aquí el objetivo central de esta investigación, que se refiere a considerar la importancia de integrar otras asignaturas, en este caso física, en la enseñanza de las matemáticas y viceversa; ya que esta oportunidad de integración y vinculación nos dará la oportunidad de ofrecer nuevos escenarios de enseñanza, que pueden ser utilizados no solamente en la enseñanza de la matemática y la física sino en otras ciencias más. Aunado a lo anterior nos hace recordar, entre otras cosas, la valoración de nuestro compromiso como docentes de matemáticas y valorar las propuestas que ofrecen otras ciencias; con esto, se reincide en el trabajo colaborativo entre academias y la ayuda mutua que podemos encontrar entre los profesores de las diferentes asignaturas. La preparación escolar que recibe el estudiante, hablo de lo que observo en el nivel medio superior sin restringir esta posibilidad a otras etapas de la enseñanza, será entre otras cosas de integración de conceptos y por ende de conocimientos. Por ejemplo, se han conformado equipos de trabajo internacionales para revisar el estudio de la matemática para ingenieros; uno de estos equipos es el que ha formado nuestro país, a través del Instituto Politécnico Nacional, y Francia, a través del Instituto Nacional de Ciencias Aplicadas, (INSA por sus siglas en francés), donde los objetivos buscados son: la evaluación de las carreras del ingeniero, la división entre el ingeniero “conceptor” (en nuestro país se conoce como ingeniero de escritorio) y el ingeniero “aplicador” (ingeniero realizador de tareas de campo), así como la creación de una red internacional de matemáticas para ingenieros y el refuerzo en la enseñanza y la investigación entre Europa y América Latina. Los ejes centrales que se han considerado para crear esta escuela son tres:

1.- Voluntad de apertura hacia los contenidos de la práctica pedagógica incluyendo las matemáticas para ingenieros.
2.- Voluntad y deseo de debate e intercambio.
3.- Situar la mayoría de las conferencias y debates en lo histórico, político, sociocultural, etc.

Como podemos apreciar en el ejemplo anterior, se hace la necesidad de crear redes de trabajo y de conocimiento entre comunidades (puede ser que dichas cooperaciones sean de índole político, económico, académico, pedagógico, etcétera pero la necesidad existe), que en lo referido a esta investigación se sitúa en los trabajos que se están realizando entre las academias de física y matemáticas. Nuevamente, hago un paréntesis aquí para mencionar que esta relación no solamente es exclusiva para las academias de física y matemáticas, si no que muy seguramente se puede extender dicha relación entre las demás academias que conforman la estructura de la enseñanza escolar del estudiante.

Por otra parte, este trabajo de investigación lo he venido desarrollando desde hace más de cuatro años y cada vez estoy más convencido de lo oportuna que fue mi designación para trabajar en ambas academias; ya que en algunas escuelas de ingeniería de Francia, por mencionar algún ejemplo, se ha manifestado por decreto, que a partir del año 2007, las academias de matemáticas y física deben trabajar en conjunto[8].

Reiterando mi interés sobre el acercamiento y la relación de trabajo en equipo que debe existir entre las academias, tanto de la misma asignatura como de asignaturas diferentes, en este caso hablamos de matemáticas y física; se manifiesta en dicho interés, objetivos comunes de trabajo como: el de incentivar la formación de redes de conocimiento y enseñanza de la ciencias, manifestando la vinculación de los programas de estudio de ambas asignaturas, la paridad en los tiempos para la enseñanza de temas, un objetivo general y común de relación entre el estudiante, profesor y conocimientos, la propuesta de nuevos escenarios escolares, etc. En forma particular puedo decir que mi experiencia docente se ha enriquecido al trabajar de cerca, desde hace dos años y medio, con otros dos profesores que al igual que yo, están laborando en ambas academias: física y matemáticas. Se ha generado un proceso multiplicador de profesores que han tenido la oportunidad y el interés de laborar en ambas academias.

[8] Comentario realizado por Christiane Dujet-Sayyed (julio del 2006) en la escuela de INSA de Lyon, Francia. Cabe mencionar que Christiane Dujet también mencionó, aquí, que a principios del 2006, en Estados Unidos, se realizó un foro internacional donde se habló sobre el creciente desinterés de los estudiantes en las matemáticas y materias afines.

Al estar compartiendo con ellos experiencias de clase, reuniones de trabajo, revisiones de exámenes, propuestas de ejercicios y problemas, me he percatado de que muchos de sus comentarios (los comentarios que he escuchado de ellos han sido en reuniones académicas, en las aulas de clase cuando imparten sus asignaturas, en platicas informales donde comentamos sobre nuestro quehacer docente, etcétera) son similares a los que yo me hacía en mis inicios como profesor de ambas academias:

- *"Yo ya no utilizo el criterio de la derivada para la explicación, en clase, el concepto de rapidez instantánea, ni mucho menos le propongo al estudiante aprenderse de memoria la regla de los cuatro pasos y algunas fórmulas de derivación; lo que realizo, actualmente, en el aula de clase para explicar el concepto de rapidez instantánea es calcular para intervalos de tiempo muy cortos la rapidez media, e introducir al alumno al estudio del límite, ya que este tema será estudiado a inicios de su próximo semestre.*

Como lo he mencionado; el tema de velocidad instantánea se revisa a finales del tercer semestre, en la asignatura de física I y el tema de límite se revisa a inicios del cuarto semestre, en la asignatura de cálculo diferencial, en el IPN."

- *"No me había percatado de lo necesario que es para el alumno reforzar, en sus clases de cálculo diferencial e integral el concepto de movimiento, desde un acercamiento de la asignatura de física, ya que los programas de estudio de cálculo diferencial e integral proponen dicho tema. Lo anterior, me permite revisar problemas de física en matemáticas, pero con un tratamiento diferente."*

- *“También en electromagnetismo, tema revisado en las asignaturas de física III y IV, quinto y sexto semestres, respectivamente se utiliza demasiado el cálculo diferencial e integral; yo creo que podríamos reconsiderar algunos problemas de electromagnetismo para desarrollarlos en el aula de clases para formar escenarios en la enseñanza del cálculo diferencial e integral”*

- *“Es muy importante que nosotros como profesores realicemos propuestas de enseñanza vinculando la física y la matemática con el propósito de que en el estudiante se desarrolle un criterio de análisis, evitando la creencia de que el cálculo diferencial es exclusivamente el saber derivar-.”*

- *“Sería conveniente también comenzar a enseñar poco a poco “matemática formal”, demostraciones matemáticas, donde la intervención de la operatividad algebraica ya está limitada.”* En este comentario quiero hacer un paréntesis para denotar el interés y el compromiso que manifiesta el profesor en su quehacer académico, interés y compromiso que se han desgastado en el quehacer del profesor. Mediante la visualización de necesidades matemáticas observadas en la asignatura de física el profesor ha reforzado el compromiso de su enseñanza buscando nuevas alternativas de escenarios escolares para mejorar la relación entre el estudiante, el profesor y el conocimiento.

- *“Debemos ser más conscientes de las tareas extra-clase que dejamos a los estudiantes tanto en cantidad como en contenido. Además nuestras evaluaciones y enseñanza deben ser acorde con los objetivos que buscamos.”*

- *“Necesitamos, no cabe duda, tener más tiempo para “sentarnos” y analizar nuestra propuesta académica, nuestra actividad como profesor, como formador, como la persona que va a formar el vínculo entre la naturaleza que nos rodea y su explicación, el vínculo entre lo abstracto y lo real-.”*

- “*Es difícil poder entender las necesidades matemáticas que tiene el estudiante en sus demás asignaturas si no hay un acercamiento por parte nuestra hacia las demás asignaturas*[9]*.”*

Por ejemplo, tanto en escuelas de México como de Francia, los comentarios de ingenieros y matemáticos que se dedican a impartir clases de matemáticas en escuelas de ingeniería son:

a) por parte de los ingenieros: *las matemáticas para ingenieros las deben impartir ingenieros.*

b) por parte de los matemáticos: *las matemáticas en cualquier nivel y para cualquier preparación profesional deben ser impartidas por los matemáticos.*

9 En escuelas, de nuestro país, que están formando gente para laborar en servicios (por ejemplo: CONALEP, CETIS, CEBETIS) se enseña una matemática y una física que están diseñadas para ingresar a estudios de ingeniería. Es necesario, revisar los programas de estudio para profesionalizar y capacitar a los alumnos de estas instituciones en su futuro próximo laboral. Comentando con un destacado doctor en matemática educativa, me comenta lo siguiente: -yo creo que los estudiantes que ingresan a un CONALEP, CETIS O CEBETIS fueron seleccionados, por parte de CENEVAL, desde hace quince años, ya que lo que evalúa CENEVAL en sus exámenes de selección para ingresar a una escuela son sus habilidades y no sus capacidades intelectuales o conocimientos y las habilidades, en el ser humano, se manifiestan a muy temprana edad-.

Yo no dudo que cada quien tenga sus argumentos, y que puedan ser validos. Lo importante es rescatar la necesidad de vinculación entre la matemática que puede impartir un ingeniero y la matemática que puede impartir un matemático.

Enfocando lo anterior en la matemática educativa, yo creo que si generamos situaciones escolares de experiencias académicas estamos logrando que la matemática educativa pueda ser vinculada en forma general y local, por que aunque los intereses de cada sociedad tienen sus particularidades, la sociedad humana en general trabaja, dentro del contexto matemático, para generar conocimiento y responder a necesidades tanto escolares como extraescolares, principalmente. Se ha comentado, por investigadores de la matemática educativa, que los objetivos generales de la enseñanza de la matemática en cada etapa de nuestra existencia son distintos: en la primaria y secundaria para solucionar necesidades primarias, en el nivel medio superior para ayudar a entender las demás ciencias y en el nivel superior, dentro de la ingeniería, para resolver problemas propios de ésta; entonces es necesario que todos respondamos con objetivos particulares, vinculándolos con dichos objetivos generales.

En conclusión, las comunidades escolares, por lo general, requieren de respuestas inmediatas que puedan redituar una utilidad o una explicación del porqué se enseñan ciertos temas o asignaturas en la formación escolar del alumno; al vincular la física y la matemática damos hincapié a que se puedan proponer respuestas a esas necesidades.

Por otra parte, debemos tener presente que nuestras sociedades son consumistas y requieren de un recurso que les reditúe un por que deben estudiar ciertos temas y ciertas asignaturas. Hemos notado que nuestras comunidades estudiantiles tienen una tendencia a no querer participar en las clases de matemáticas y ciencias afines, los motivos pueden ser variados, por lo que es necesario dar una movilidad a nuestra enseñanza, dicha movilidad o cambio debe estar acompañado de una ayuda y valoración mutua entre las diferentes ciencias, asignaturas y temas de clase.

Lo anterior se logrará con la participación de todos los que estamos involucrados en el proceso de la enseñanza; trabajando en equipo y compartiendo experiencias de clase y conocimientos, por parte de los profesores; y por parte de las autoridades teniendo objetivos dirigidos hacia un bien común y no particular. El IPN no es ajeno a las necesidades actuales de la sociedad, por tal motivo ha propuesto, recientemente, lo que se conoce como proyecto aula, dicho proyecto tiene como propuesta el integrar a las academias para que se involucren en la formación escolar del estudiante mediante un proyecto de investigación en el que participen todas ellas. La vinculación entre asignaturas es el inicio para el trabajo en equipo y la participación total y de todos los involucrados en el proceso de enseñanza-aprendizaje; es decir lo que se debe pretender es buscar alternativas de enseñanza para reforzar la vinculación entre los actores del proceso enseñanza aprendizaje: estudiante, profesor y conocimiento.

CAPÍTULO 2

El estudiante y su pensamiento matemático.

EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DEL ESTUDIANTE DEBE SER CONOCIMIENTO DEL PROFESOR

Cuando un profesor se encuentra ante sus alumnos en el salón de clase, se espera que enseñe un conocimiento específico y que los estudiantes lo aprendan. Sin embargo, si no sabemos la forma en que funciona el pensamiento matemático de los alumnos, no podemos desde la enseñanza ayudarles en su aprendizaje (Cantoral, R., et al, 2003). Además, es ésta la razón por la que esta investigación se propone abordar el estudio del cómo la vinculación entre ciencias (en este caso: la matemática y la física) propuesta en la enseñanza escolar y por ende en el discurso del profesor (en el aula de clase) ayuda al estudiante a no tener, exclusivamente, una asimilación memorística de contenidos, una mecanización algorítmica de las propias tareas matemáticas y físicas; además, lo ayuda a mantener, generalmente, una necesidad de utilidad de una ciencia para con la otra y viceversa, o de un tema o contenido matemático anterior con el posterior. Cuando hablo de un contenido o tema matemático posterior o anterior, en la enseñanza, hago referencia a los tiempos escolares en que se presentan, dichos contenidos matemáticos, a los estudiantes. Por ejemplo, en los programas de estudio de cálculo diferencial, que se tienen en las escuelas de nivel medio superior, se propone que se enseñe, primeramente, el concepto de función, y posteriormente, el concepto de límite; pero el estudiante no percibe, generalmente, por que es necesario dicho orden, o un tanto más desalentador, no encuentra el sentido de porqué se le ha enseñado el concepto de función si en su operatividad algorítmica para calcular límites no ve incluido el concepto de función, sino solamente un proceso algebraico.

Por lo anterior, es que ahora revisaremos los procesos del pensamiento matemático de los estudiantes durante la enseñanza escolar. Es en este sentido que hablaremos, específicamente, de los estudiantes y su pensamiento matemático. El término pensamiento matemático se usa para referirse a las formas en que piensan las personas que se dedican profesionalmente a las matemáticas. Los investigadores sobre el pensamiento matemático se ocupan de entender cómo interpreta la gente un contenido específico, en nuestro caso las matemáticas. Se interesan por caracterizar o modelar los procesos de comprensión de los conceptos y procesos propiamente matemáticos. Por otra parte, al hablar de pensamiento matemático nos localizamos propiamente en el sentido de la actividad matemática como una forma especial de actividad humana. De modo que debemos interesarnos por entender las razones, los procedimientos, las explicaciones, las escrituras o las formulaciones verbales que el alumno construye para responder a una tarea matemática, del mismo modo que nos ocupamos por descifrar los mecanismos mediante los cuales la cultura y el medio contribuyen en la formación del pensamiento matemático (Cantoral, R., et al, 2003).

Cuando revisamos, como profesores o como estudiantes, por primera vez una tarea matemática[11] (ya sea en el aula de clases o fuera de ésta), lo primero que hacemos, regularmente, es leerlo más de una vez, tratando de que en dichas lecturas podamos ir encontrando las herramientas matemáticas necesarias para plantear la solución del problema; además, el planteamiento de dichas herramientas matemáticas será de acuerdo a nuestra experiencia y/o formación académica. Es decir, una tarea matemática, en específico, puede tener, de inicio, varias propuestas de solución: algorítmica, demostrativa, de aplicación, de explicación, de comprobación, de análisis etcétera. La propuesta de solución de cada uno de nosotros dependerá, principalmente, del historial académico que tenga cada uno de nosotros (ya sea como estudiante o como profesor). Por ejemplo, cuando pregunté[12] a un grupo de treinta estudiantes y veinte profesores, sobre lo que quería decir la siguiente expresión:

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4$$

encontré las siguientes respuestas:

- ✓ que la variable "x" se acerca a 2 y su resultado es 4.
- ✓ que la variable independiente tiende a 2 y su resultado es 4.
- ✓ que $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tal que…

11 Al hablar de tareas matemáticas me estoy refiriendo principalmente a ejercicios o problemas matemáticos, los cuales podemos encontrar en libros de texto (ya sea de física o de matemáticas), guías de estudio, listas de problemas propuestos por un profesor o por un grupo de profesores (locales o no), entre otros.

12.- La pregunta la realicé en horarios de clase normales, en dos escuelas diferentes, con alumnos regulares que estaban llevando la materia de cálculo diferencial. Para los profesores; la pregunta fue hecha en entrevista en forma individual. Quiero agregar que las respuestas, en general, fueron similares tanto en alumnos como en profesores.

- ✓ que la posición de un objeto se acerca a 4 unidades de longitud cuando su tiempo de movimiento se acerca a 2 unidades de tiempo, siempre y cuando…
- ✓ que la función converge cuando…
- ✓ o simplemente, la repetición de la pregunta; que el límite de “x” cuadrada, cuando “x” se acerca a dos es igual a 4.

Por otra parte, también, al estar revisando (como profesores) dicha tarea matemática, nos encontraremos muy seguramente, con dificultades de: lectura y comprensión matemática del problema, planteamiento y desarrollo de posibles soluciones, confrontación de conocimientos, conexión de ideas, entre otras; estas dificultades, no es de dudarse, que también aparecerán en el estudiante.

Por lo antes mencionado se hace necesario prestar atención, como profesores, a lo que en un momento dado nos puede causar dificultad o interés en la solución de dicha tarea matemática, ya que dichas observaciones serán, tal vez, los antecedentes de las posibles dudas de nuestros estudiantes, al plantearles el mismo problema en clase. Si analizamos, como profesores, nuestros procesos de solución de dicho problema, muy seguramente estaremos revisando por adelantado parte de lo que encontraremos en el aula de clases al presentar, a nuestros estudiantes, dicho problema. De acuerdo a lo anterior, estaremos en la disposición de mantener una apertura más amplia de análisis, como profesores, para entender las posibles dificultades que podrían tener nuestros estudiantes en sus clases de matemáticas o física. Revisando y analizando nuestra práctica docente fuera del aula de clases (en la preparación de clases) estaremos viviendo muy de cerca lo que posiblemente sucederá en un futuro, generalmente muy cercano, en el aula de clases con nuestros estudiantes.

Por otra parte, si se quisiera describir el proceso de desarrollo del pensamiento matemático tendríamos que considerar que éste suele interpretarse de distintas formas; por un lado se le entiende como una reflexión espontánea que los matemáticos realizan sobre la naturaleza de su conocimiento y sobre la naturaleza del proceso de descubrimiento e invención en matemáticas. Por otra, se entiende al pensamiento matemático como parte de un ambiente científico en el cual los conceptos y las técnicas matemáticas surgen y se desarrollan en la resolución de tareas; finalmente una tercera visión considera que el pensamiento matemático se desarrolla en todos los seres humanos en el enfrentamiento cotidiano a múltiples tareas. Finalmente, desde esta última perspectiva el pensamiento matemático no está enraizado ni en los fundamentos de la matemática ni en la práctica exclusiva de los matemáticos, sino que trata de todas las formas posibles de construir ideas matemáticas, incluidas aquellas que vienen de la vida cotidiana. Por tanto, se asume que la construcción del conocimiento matemático tiene muchos niveles y profundidades (Cantoral, R., et al, 2003).

Por otra parte, se sabe que la obra de Piaget tuvo una influencia considerable sobre el esclarecimiento del pensamiento humano; más específicamente, sus estudios sobre la construcción de la noción de número, de las representaciones geométricas, del razonamiento proporcional y del pensamiento probabilística, han tenido una fuerte influencia en el explicaciones de cómo se construyen las nociones matemáticas. Aunque esos hallazgos han desempeñado un papel fundamental en el terreno de la investigación contemporánea, los currículum de matemáticas y los métodos de enseñanza han sido inspirados durante mucho tiempo sólo por ideas que provienen de la estructura de las matemáticas formales y por métodos didácticos fuertemente apoyados en la memoria y en la algoritmia, donde con frecuencia el estudiante se encuentra imposibilitado de percibir los vínculos que tienen los procedimientos con las aplicaciones más cercanas a su vida cotidiana; y se priva entonces de experimentar sus propios aprendizajes en otros escenarios distintos de los que provee su salón de clase (Cantoral, R., et. al, 2003). Tal vez este tipo de enseñanza ha provocado en los estudiantes una “participación contemplativa” en el aula de clases y lo que buscamos, como profesores, es sin duda una participación activa de nuestros estudiantes. Una de las preocupaciones que nos atañen en nuestra enseñanza contemporánea debe ser; sin duda, una reflexión que después permita desarrollar propuestas de una enseñanza con rasgos de creatividad y propuesta de conocimiento por parte del estudiante. Dichas propuestas deben estar respaldadas por fundamentos teóricos bien establecidos por el profesor y bien aprendidos por el estudiante. De acuerdo a lo anterior según R. Douady (citado por Cantoral, R., et al, 2003), saber matemáticas precisa de dos aspectos. Por un lado, se refiere a la disponibilidad funcional de nociones y teoremas matemáticos para enfrentar problemas e interpretar nuevas situaciones. En este proceso, dichas nociones y teoremas tienen un estatus de herramienta, en tanto que sirven para que alguien actúe sobre un problema en determinado contexto. Por otra parte, también significa identificar las nociones y a los teoremas como parte de un cuerpo de conocimientos reconocidos socialmente. Es ahí que se formulan definiciones, se establecen relaciones entre nociones mediante teoremas y se prueban las conjeturas adquiriendo entonces el estatus de objeto. Al adquirir ese estatus, están descontextualizados y despersonalizados para permitir su aprendizaje. Este proceso de descontextualización y de despersonalización participa en el proceso de apropiación del conocimiento.

Desde esta perspectiva, nuestra forma de aprender matemáticas no puede reducirse a la mera copia del exterior, o digamos que, a su duplicado, sino más bien es el resultado de construcciones sucesivas, cuyo objetivo es garantizar el éxito de nuestra actuación ante una cierta situación. Una consecuencia educativa de este principio consiste en reconocer que tenemos todavía mucho que aprender al analizar los propios procesos de aprendizaje de nuestros alumnos. Otra visión del aprendizaje que está siendo puesta en funcionamiento más recientemente se conoce como la aproximación sociocultural del aprendizaje. Según la cual, se considera que la mente está más allá de la piel, y en esa medida, los procesos mentales humanos poseen una relación esencial con los escenarios culturales, históricos e institucionales. Para un estudiante, aprender significa involucrarse en una actividad intelectual cuya consecuencia final es la disponibilidad de un conocimiento con su doble estatus de herramienta y objeto. De herramienta; se refiere a la disponibilidad funcional de nociones y teoremas matemáticos para enfrentar problemas e interpretar nuevas situaciones. De objeto; significa identificar las nociones y a los teoremas como parte de un cuerpo de conocimientos reconocidos socialmente (Cantoral R., et al, 2003).

El estudiante debe explorar sus conocimientos matemáticos en otras ciencias, y las otras ciencias deben ser exploradas dentro de la matemática para manifestar en el estudiante la utilidad que representa el estudio de la matemática. Además, las concepciones matemáticas o físicas ya establecidas en el estudiante deben servir como referencia o inicio para establecer, en él, los nuevos conocimientos de estas ciencias o de otras más; R. Cantoral (2003) lo ha llama principio de consistencia. De acuerdo a lo anterior, es necesario estar manifestando, constantemente, en nuestras clases de matemáticas los conocimientos previos de matemáticas o de física (creo que esta manifestación de conocimientos previos en el estudiante puede incluirse, también, en otras ciencias) que tiene el estudiante para poderlos enlazar con sus nuevos aprendizajes matemáticos o físicos. Así se ayuda a estimular una relación de conceptos y una vinculación de ciencias en el desarrollo del pensamiento matemático del estudiante.

Ahora, desde la perspectiva de las situaciones didácticas, propuesta por Guy Brousseau como un modelo de los procesos de aprendizaje, se presenta esta aproximación teórica en cuatro fases:

1.- Dialéctica de la acción: Donde nos menciona que una adecuada situación de acción debe permitir al alumno juzgar el resultado de su acción, ajustar este resultado sin la intervención de su profesor, gracias a la retroalimentación de la situación misma.

2.- Dialéctica de formulación: Para que el alumno pueda explicar por él mismo su modelo implícito y para que esta formulación tenga sentido para él, es necesario que pueda usarlo para obtener otros resultados o para que otro alumno los obtenga. El resultado de esta dialéctica permite crear un modelo explícito que puede ser formulado con la ayuda de signos y de reglas, conocidas o nuevas.

3.- Dialéctica de la validación: La validación empírica obtenida a partir de las fases precedentes es insuficiente. El alumno debe, ahora, mostrar por qué el modelo que acaba de crear es valido. Para que el alumno construya una demostración y para que tenga sentido para él, se necesita que pueda hacerla en una situación llamada validación, donde pueda convencer a otro.

4.- Dialéctica de la institucionalización: Una vez construido y validado el nuevo conocimiento será parte del patrimonio de la clase. Aunque no tiene todavía el estatus de saber social. Las situaciones de institucionalización son aquellas donde el profesor fija convencionalmente y explícitamente el estatus cognitivo del saber. Después de esta fase administrada por el profesor, el conocimiento es etiquetado como un saber oficial, que los alumnos deben retener y pueden aplicar. Además ejercicios de aplicación, de entrenamiento y que sirvan para que el alumno adquiera confianza en sus planteamientos, estarían completando el proceso didáctico.

Como se ha mencionado, este trabajo de investigación está referido, en específico, al alumno pero es necesario puntualizar, en este momento, un poco y en forma general sobre el trabajo del profesor en el diseño de actividades; entonces, durante el diseño de la actividad, el profesor debe considerar qué mirar y cómo mirar lo que tiene y no tiene el estudiante. Se trata de construir un perfil de entrada con las características de los significados ya construidos por el estudiante (Guerrero et al, 2006).

Según Llinares (1991) (citado por Guerrero et al, 2006) la secuencia didáctica se entiende como el plan de actuación del profesor, corresponde a lo que denomina la fase preactiva, donde se explicitan aquellos aspectos del sistema didáctico fundamentales a toda acción de enseñanza y aprendizaje; la secuencia didáctica es un aspecto central de la metodología de la Ingeniería didáctica necesaria para estructurar el trabajo de aula de manera sistemática, en la relación estudiante, profesor, saber y entorno (relación didáctica).

Continuando con el estudiante, de acuerdo a Brouseau (1999) (citado por Panizza) “El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje.”

La perspectiva de diseñar situaciones que ofrecieran al alumno la posibilidad de construir el conocimiento dio lugar a la necesidad de otorgar un papel central -dentro de la organización de la enseñanza-, a la existencia de momentos de aprendizaje, concebidos como momentos en los cuales el alumno se encuentra solo frente a la resolución de un problema, sin que el maestro intervenga en cuestiones relativas al saber en juego.

Cantoral (2003) hace referencia a dicha propuesta de aprendizaje con el siguiente ejemplo -determinar la abscisa del punto de inflexión en la gráfica de $f(x)$, permite asociar un recurso algorítmico de derivación al aplicarlo a una expresión analítica y de este modo se reduce considerablemente el sentido que puede obtenerse de una eventual interpretación geométrica. Esto es al privilegiar un solo marco, el marco algebraico en este caso, se abandonan otros posibles elementos que ayudarían a una más amplia significación del objeto a estudiar: el punto de inflexión y se elimina del discurso escolar uno de los estilos de pensamiento: el pensamiento visual.

Ello conduce a una utilización de la definición de la derivada como regla y la localización del punto de inflexión a una mera reproducción de un mecanismo algebraico. Dicho procedimiento, como sabemos, consiste en derivar dos veces la función de la cual queremos localizar los puntos de inflexión de su gráfica enseguida debemos encontrar la raíz de la segunda derivada, y finalmente habremos de verificar si realmente los puntos encontrados son los puntos de inflexión de la gráfica de la función- (Cantoral et al, 2003).

Después de la explicación anterior Cantoral (2003) agrega, como comentario final – queremos finalizar este ejemplo con un comentario respecto del proceso de significar los objetos matemáticos en la clase de matemáticas. Diremos que el punto de inflexión tiene un significado geométrico que suele ignorarse debido al abandono del contexto gráfico, ello induce conflictos potenciales para el aprendizaje de nuestros alumnos. La ausencia de etapas de exploración y significación gráfica y visual crea una barrera a los propios procesos de pensamiento matemático de nuestros alumnos.

Claramente el manejo de las derivadas y su asociación con las inflexiones debe llegar a la etapa operativa una vez que una cierta significación del punto de inflexión ha sido construida por los estudiantes (Cantoral et al, 2003).

Cuando el alumno tiene más expectativas donde aplicar el concepto aprendido, la utilización de este concepto en situaciones diversas (obviamente, donde pueda aplicarse dicho concepto) será con mayor frecuencia y facilidad. Además, si el estudiante conoce el cómo y el porqué de las herramientas matemáticas, muy seguramente las aplicaciones de estas herramientas podrán ser dirigidas adecuadamente, por el estudiante, en situaciones donde sean requeridas.

Desarrollar las habilidades de pensamiento analítico, capacidad crítica y razonamiento matemático de los estudiantes enfatiza la importancia de entender y manejar el lenguaje matemático. A través del uso símbolos, gráficas y conceptos matemáticos es posible entender y comunicar con precisión ideas sobre diferentes aspectos de nuestra cultura cada día tecnológicamente más sofisticada. La habilidad de razonar permite a los estudiantes resolver problemas cotidianos tanto dentro como fuera de la escuela. Cuando utilizamos el razonamiento para validar nuestras ideas, aumentamos nuestra confianza en las matemáticas. Lo anterior implica que los estudiantes deben ser expuestos a numerosas y variadas experiencias que los motiven a valorar el pensamiento matemático, a habituar la mente a situaciones matemáticas, y a entender y apreciar el papel que juegan las matemáticas en el quehacer humano. También implica que los estudiantes deben ser motivados a explorar, conjeturar, reconocer y corregir errores, con el fin de adquirir confianza en la solución de problemas (Micha E, 1998).

Uno de los elementos a considerar dentro del pensamiento matemático del estudiante es la utilidad que la matemática le pueda ofrecer para atender tanto sus necesidades escolares como extraescolares.

Típicamente, el aprendizaje de un concepto incluye muchas etapas que pueden desarrollarse durante periodos muy prolongados y que eventualmente quedan por completo fuera del semestre escolar. Por ejemplo, se debe iniciar con el desarrollo de un proceso en términos concretos, y en la medida en que el alumno se familiariza con los procesos, estos toman la forma de una serie de operaciones que pueden ser desarrolladas y coordinadas en su pensamiento. El alumno habrá adquirido entonces un pensamiento operacional con respecto a ese concepto. En una etapa posterior, la imagen mental de este proceso cristaliza en una nueva y única entidad, digamos que es un nuevo objeto. Una vez que éste ha sido adquirido, el estudiante ha desarrollado cierta habilidad para pensar dicha noción, ya sea en el nivel dinámico, como un proceso, o en el nivel estático, como un objeto. Este manejo dual posibilita al estudiante el que piense en términos de posibilidades: ¿qué ocurriría si hago o no cierta operación?

Ahora, creo conveniente hablar, también en forma muy general, del currículum; en esos términos, uno de los pasos más esenciales en el aprendizaje de las matemáticas es el construir objetos matemáticos; es decir, hacer un objeto de un proceso. De modo que uno de los principales objetivos del currículum sería, desde esta perspectiva, el desarrollar el pensamiento operacional; el pensamiento sobre un proceso de términos de operaciones sobre objetos (Cantoral et al, 2003).

EL PENSAMIENTO ALGORÍTMICO Y VISUAL COMO PARTE DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DEL ESTUDIANTE.

Según Cordero (2004) -La visualización se caracteriza por complejos procesos de interacción entre las representaciones pictóricas externas (gráficas, figuras, etcétera) y la formación de imágenes mentales en el individuo. Ahora bien, la capacidad para visualizar cualquier concepto matemático o problema requiere de la habilidad de interpretar y entender la información figurativa sobre el concepto mismo, manipularla mentalmente y expresarla mediante un soporte material (Castro y Castro, 1997). Desde el punto de vista de la educación matemática, la visualización incluye dos direcciones: la interpretación y la comprensión de modelos visuales y la habilidad para traducir en imágenes visuales la información que es dada en forma simbólica (Dreyfus, 1993). Además, sobre tal base, las gráficas y el lenguaje verbal escrito son utilizados como medios para indagar, en los estudiantes, sobre sus concepciones e interpretaciones acerca de los conceptos y relaciones matemáticas en torno al comportamiento de funciones.

Por otra parte, el pensamiento matemático incluye por un lado, pensamiento sobre tópicos matemáticos y por otro, procesos avanzados del pensamiento como abstracción, justificación, visualización, estimación o razonamiento bajo hipótesis. El pensamiento matemático, entonces, debe operar sobre una red compleja de conceptos, unos avanzados y otros más elementales (Cantoral et. al, 2003). Un ejemplo de lo anterior, para el concepto de derivada, el estudiante además de saber operar las reglas de derivación debe tener presente los conceptos de límite, función, variable, constante, cambio, tendencia; entre otras cosas como la interpretación gráfica de funciones y las relaciones que tienen dichas gráficas[13] con los elementos de la derivada.

Continuando con el comportamiento gráfico de las funciones, analizadas desde la perspectiva del estudiante tenemos que de acuerdo con Dolores (2003), investigar las concepciones que tienen los alumnos de bachillerato, durante el proceso de análisis de funciones, asume que poder analizar el comportamiento de funciones es una de las habilidades básicas para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, que precisa –como señalan Cantoral y Farfán (2000)- de procesos temporalmente largos, a juzgar por los tiempos didácticos habituales. Supone, por ejemplo, del dominio de la matemática básica y de los procesos del pensamiento asociados, pero exige simultáneamente de diversas rupturas con los estilos del pensamiento prevariacional, como el algebraico. Para acceder al pensamiento y lenguaje variacional se requiere, entre otras cosas, del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados por parte del que aprende. Luego entonces, comprender los procesos de interpretación de las gráficas de funciones

[13] Si hablamos de las representaciones gráficas, los autores Irma López Saura y Piotr Marian Wisniewski del libro Cálculo diferencial de una variable con aplicaciones, opinan en este libro que ellos han hecho énfasis especial en el comportamiento gráfico de las funciones porque creen que esto le da claridad a los contenidos propuestos en su libro y motiva la imaginación del estudiante.

puede contribuir al esclarecimiento del desarrollo de esta forma de pensamiento entre los estudiantes.

Llama la atención que, con frecuencia, las interpretaciones de los estudiantes, producto de la visualización que hacen de las gráficas y los significados que les atribuyen, no son congruentes con los significados aceptados en la matemática, generando la aparición de errores y concepciones alternativas.

Es necesario, de acuerdo a lo anterior, hablar de los errores como una parte del estudio sobre el pensamiento del alumno, ya que los errores son producto de los razonamientos de éste. El sentido de “error” ha sido usado como muestra de un conocimiento no construido, lo cual es falso. Según Mónica del Puerto (2004), nos menciona que: - en el ámbito de la educación matemática los errores aparecen permanentemente en las producciones de los alumnos: las dificultades de distinta naturaleza que se generan en le proceso de aprendizaje se conectan y refuerzan en redes complejas que obstaculizan el aprendizaje, y estos obstáculos se manifiestan en la práctica en forma de respuestas equivocadas. Según Socas (1997), el error debe ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no sólo la consecuencia de una falta específica de un conocimiento o una distracción. Matz (citado por Chahar, 2003) distingue dos fases en la conducta de los alumnos ante un problema: en la primera, el conocimiento previo sobre el tema toma la regla de una forma o fórmula a aplicar, mientras que en la segunda se ponen en juego un conjunto de técnicas de extrapolación que actúan de nexo entre las reglas conocidas y los problemas que no son familiares. Los errores sistemáticos en los que incurren los alumnos en la resolución de problemas son, según el autor, el resultado de un fracasado intento por adaptar conocimientos, adquiridos previamente a una nueva situación. Brousseau, Davis y Werner (1986) (citados por Rico, 1995), señalan en el mismo sentido, que los errores son el resultado de un procedimiento sistemático imperfecto que el alumno utiliza de modo consistente y con confianza. En la actualidad, el error es considerado parte inseparable del proceso de aprendizaje. Los investigadores en educación matemática sugieren diagnosticar y tratar seriamente los errores de los alumnos, discutir con ellos sus concepciones erróneas, y presentarles luego situaciones matemáticas que les permitan reajustar sus ideas -(Puerto et al, 2004).

Al igual que del Puerto, los trabajos acerca las concepciones de obstáculo de acuerdo a Bechelard y Piaget (citados por Hernández, 2000) muestran que el error y el fracaso no tienen el rol simplificado que en ocasiones uno quiere hacerles jugar; el error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar que uno cree en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso, o simplemente inadaptado. Los errores de éste tipo no son erráticos e imprevisibles, se han constituido en obstáculos; tanto en el funcionamiento del maestro como en el del alumno.

Aunado a lo anterior, los estudiantes desarrollan ideas de su mundo, significados para palabras usadas en la ciencia y estrategias para obtener explicaciones acerca de cómo y porqué las cosas se comportan de tal o cual manera. A estas categorías de creencias, teorías, significados y explicaciones se les denomina con el término de concepciones de los estudiantes (Osborne y Wittrock, 1993).

Por otra parte, varias investigaciones han reportado las dificultades y errores que cometen los estudiantes al construir, comunicar o extraer información de las gráficas (Wainer, 1992; Fabra y Deulofeu, 2000; Acuña, 2001) para articular diferentes representaciones ligadas al concepto de función (Hitt, 1988). Una clasificación de los problemas en la comprensión gráfica (Leinhardt et al, 1990) toma en cuenta las confusiones entre pendiente y altura y entre intervalo y punto, al igual que la consideración de la gráfica como un dibujo y la idea de que está construida por un conjunto discreto de puntos. Por otra parte (Dolores, 1998), se han encontrado algunas dificultades parecidas a las anteriores.

Las tres cuartas partes de 112 estudiantes de bachillerato que habían concluido su curso de cálculo diferencial, cuando se les pregunto por la velocidad[14] de un cuerpo que cae por acción de la gravedad, dieron $f\ (t_0)$ en vez de $f\ '(t_0)$: ofrecieron como respuesta la magnitud de la ordenada para t_0 en vez de la pendiente de la curva de la curva en el punto $(t_0\ ,\ f\ (t_0))$.

Azcarate (1993), al investigar los esquemas conceptúales asociados con el concepto de pendiente, ya había notado que la mayoría de los alumnos caracterizados con perfil geométrico vinculan el ángulo de inclinación de la recta con la pendiente y, en algunos casos, con la magnitud de la ordenada al origen o con el punto donde la recta corta al eje de las y. Otros estudios sugieren que muchos estudiantes tratan con las funciones de forma puntual; es decir, pueden trazar y leer puntos, pero no reflexionar sobre el comportamiento de la función en intervalos definidos o en forma global (Bell y Janvier, 1981). Dentro de mi experiencia como docente he notado situaciones parecidas con las representaciones gráficas de variables tiempo-distancia de fenómenos físicos.

14. Como se ha mencionado en los capítulos anteriores, muchos de nosotros y en variadas y múltiples ocasiones, usamos indistintamente los términos velocidad y rapidez, lo cual provoca incertidumbre en el estudiante.

Otro ejemplo de interpretación gráfica hecha por lo estudiantes se observa en Dolores, Alarcón y Bello (2002), donde se detectó que los estudiantes conciben la condición mayor velocidad media, por un lado, como asociada con la representación gráfica de la ordenada de mayor altura o el intervalo al que le corresponden las ordenadas de mayor altura, por otro, con el segmento rectilíneo de mayor longitud de la gráfica.

Cuando hacen estimaciones de la velocidad media en una gráfica constituida por un segmento rectilíneo paralelo al eje de las *t*, las concepciones alternativas halladas se vinculan con la magnitud de la ordenada, mientras que otros operan con los extremos o el medio del intervalo de tiempo con su respectiva ordenada constante (los multiplican o dividen). Respecto a la mayor velocidad inicial, se nota una tendencia muy marcada entre los estudiantes, que disminuye en los profesores, a elegir la gráfica que parte del origen, pero con ordenada mayor que cero. En cuanto a la velocidad negativa, los estudiantes y profesores la asocian mayoritariamente con la gráfica cuyas ordenadas son negativas, y pocos con gráficas de rectas con pendiente negativa: algo parecido ocurre cuando se les pide la menor rapidez. La gran mayoría de los cuestionados relacionan la gráfica cartesiana que se asemeja a la trayectoria para el caso de la caída libre de los cuerpos; esta concepción equipara el recorrido del movimiento físico con su gráfica cartesiana. La interpretación de gráficas requiere necesariamente de procesos agudos de visualización; sin embargo, muchos estudiantes se muestran reticentes a utilizar el pensamiento visual (Einserberg y Dreyfus, 1991). Prefieren el trabajo algorítmico debido a que el pensamiento visual implica procesos cognitivos superiores a los que demanda aquel. No obstante las dificultades y las resistencias por el desarrollo de un pensamiento visual; la lectura de gráficas constituye una actividad necesaria para la comprensión de los procesos de variación.

Los trabajos de Vinner (1989), Einserberg y Dreyfus (1990) (citados por Fuentes y Valdez, 1998) señalan respecto de las resistencias por parte de los estudiantes al uso de consideraciones visuales. Ellos apuntan que hay predominio del pensamiento algorítmico sobre el visual, y que una de las causas posibles es que pensar visualmente exige demandas cognitivas superiores a las que exige el pensar algorítmicamente, además, de que los profesores de matemáticas promueven el pensamiento algorítmico sobre el visual. Hemos observado que en el tránsito de un contexto a otro, se promueve la adquisición del significado de todos y cada uno de los elementos resultantes. La memoria entendida como sistema de almacenamiento de datos o información no tiene cabida en estos procesos de manera sustantiva.

Según Fuentes y Valdez (1998) piensan que si ofrecen al estudiante la oportunidad de asociar el objeto matemático a un contexto gráfico, éste puede enriquecer su concepto a través de la adquisición de sentido al desarrollo algebraico y significado del objeto matemático en juego, por la visión alterna en otro contexto. En este proceso de visualización en más de un contexto se rescatan ideas intuitivas, figuras representativas que le dan vida al objeto matemático.

Investigaciones recientes respecto a la consideración de la asociación y/o articulaciones de contextos, concluyen que los estudiantes adquieren significados del concepto de raíz real (Fuentes, 1998) en los distintos contextos, además de significados propios a cada uno de los problemas a través de las relaciones que establecían entre la información de los mismos y su disposición en los distintos marcos. Por ejemplo, en mi experiencia como docente he observado en los programas de algebra, del IPN, que el tema de radicales ha desaparecido, prácticamente. ¿Cuál fue el argumento para sacarlo? el alumno trata el tema de radicales en las asignaturas de geometría analítica, cálculo diferencial, física I, física II y cálculo integral.

Con esta visión, es necesario que los profesores que tenemos a cargo los cursos de matemáticas incluyamos, en nuestra enseñanza, el análisis gráfico. El cual me ha permitido, como herramienta matemática, el poder vincular los conocimientos físicos y matemáticos en las clases de física y matemáticas, con alumnos del nivel medio superior. Se manifiesta, en el aula de clases, una vinculación entre ciencias. En los trabajos de Even (1998) (citados por Cordero, 2004), quienes utilizan con facilidad y libremente el análisis global de los cambios en las representaciones gráficas tienen una mejor y poderosa comprensión de las relaciones entre ellas que la gente que prefiere restringirlo a las características locales y específicas. Al igual que la cita de Cordero (2004); Moschkovich, Schoenfeld y Arcabi (1993) piensan que la utilización coordinada de ambas formas de análisis puede contribuir de mejor manera a desarrollar la habilidad de análisis de funciones a través de sus gráficas.

Entonces podemos decir que esta disposición de combinación debe ser utilizada en matemáticas y física haciendo referencia de los conocimientos de una de las ciencias en la otra y viceversa.

CAPÍTULO 3

Acercamientos con estudiantes para trabajar la vinculación entre asignaturas, en el aula de clase, para la enseñanza de las matemáticas.

En términos particulares, este trabajo tiene un enfoque de relación entre la dinámica y el concepto de derivada[15]. Mi intención es utilizar las herramientas simbólicas y conceptuales, tanto de la dinámica como de la derivada para configurar un contexto de relación entre la matemática y la física. Se pretende, mediante coyunturas académicas[16], dar respuesta a la necesidad de ofrecer al estudiante, principalmente en el nivel medio superior la vinculación que éstas tienen con el entorno académico del propio estudiante. Este trabajo no pretende repetir la forma de exponer el contenido de los tantos libros de texto que se han usado en la enseñanza del cálculo diferencial, en el nivel medio superior, en las últimas décadas; aunque debo aclarar que no se está validando y mucho menos desechando el trabajo de estos textos en esta tesis. Aunado a lo anterior, este trabajo también tiene la intención de invitar al estudiante y al profesor al quehacer creativo del ser humano, evitando el estancamiento de la propuesta individual y colectiva en los tiempos y espacios escolares, al tener presente la relación del profesor, el estudiante y el conocimiento; es decir, se manifiesta en esta investigación la preocupación de la posición estática que muestra el estudiante en el aula de clases, el estudiante muestra poca participación en el aula de clases.

[15] El concepto de la derivada se puede vincular, también, con otros conceptos que le sean más familiares al estudiante. No es exclusiva la vinculación de la derivada con la cinemática. Para lo anterior, se requiere de acciones horizontales entre la matemática y las demás ciencias en la enseñanza de las matemáticas para nuestra sociedad.

[16] Se habla de coyunturas académicas como las herramientas que relacionen y vinculen los conocimientos adquiridos por el estudiante en el aula de clases.

Se observa en variadas y constantes ocasiones, en el estudiante, una apatía a la participación en clase, a la propuesta individual o en grupo o simplemente apatía hacia la materia; esto finalmente se convierte en desdén hacia el estudio y como consecuencia nos proporciona, tal vez, la causa más importante de deserción en el centro escolar. Visualizando lo anterior, con este estudio se pretende aplicar las herramientas necesarias para que el estudiante no tenga exclusivamente un aprendizaje memorístico, si no por el contrario, la atención de este trabajo se centra en el aprendizaje significativo del estudiante y en la metacognición.

Por otra parte, la necesidad de crear acciones tanto verticales[17] como horizontales[18] para la enseñanza (profesor) y el aprendizaje (estudiante), tiene como finalidad que el discurso matemático, usado dentro de las aulas de clase, deje de ser inerte y ritual.

Al considerar el concepto de la derivada, y la idea de relacionar dicho concepto con la geometría del movimiento, nos conlleva a considerar temas de la mecánica clásica, como la cinemática y la cinética. Si utilizamos en las asignaturas de matemáticas, además de la parte conceptual, el estudio de las gráficas de los fenómenos tratados como problemas de texto en la clase de física, el estudiante tendrá más expectativas que fortalecerán su aprendizaje.

[17] Conocimiento y relación entre los programas de estudio de la misma asignatura del mismo nivel escolar; en este caso del bachillerato; así como el conocimiento y la relación de los programas de estudio de niveles superiores e inferiores de estudio: para un profesor de matemáticas, en el bachillerato, sería muy conveniente conocer los programas de estudio de secundaria y de nivel superior.

[18] Relación entre las diferentes asignaturas y programas de estudio de éstas, del mismo nivel escolar; para nuestro caso la relación sería entre física y matemáticas.

Además, el profesor tendrá la oportunidad, dentro del ámbito escolar, de trasladarse de un ambiente a otro (pasar de un ambiente matemático a un ambiente físico y viceversa); teniendo una dinámica de clase más abierta.

Como ya lo he mencionado, el estudiante de tercer semestre de los Centros de Estudios Científicos y Tecnológicos, CECyTS, del IPN, área físico matemáticas, se ve en la situación de estudiar el movimiento rectilíneo uniforme y uniformemente acelerado, indicados en los programas de estudio de las asignaturas de física y cálculo; este momento escolar me ha permitido, en primera instancia, modelar una posible relación horizontal a la matemática; al considerar temas y problemas revisados en las asignaturas de física I y física II (cinemática y cinética) en las clases de geometría analítica, cálculo diferencial y cálculo integral; lo cual puede permitir reforzar, en el estudiante, conceptos de movimiento; analizados desde un punto de vista más abstracto, con la matemática. En este sentido, el cálculo diferencial e integral deja de ser, para el estudiante, el trabajar algebraicamente, principalmente, con los temas que se observan en dichas asignaturas; como por ejemplo el saber derivar e integrar funciones; así, comienza entonces, una relación y vinculación conceptual y operativa de la física y la matemática, en el desarrollo escolar del estudiante. La física relacionando los conceptos de la derivada y de la integral con el concepto de movimiento de un cuerpo o partícula, y la matemática proporcionando la herramienta del cálculo como una alternativa analítica de solución a problemas revisados en semestres anteriores por el estudiante, en la asignatura de física. En este sentido, se abre una reflexión, dentro de su entorno escolar, sobre las necesidades de la física para responder a contextos de la matemática y viceversa.

Como ya lo mencioné, una de las direcciones que considera, este trabajo de investigación es la utilización de la cinemática y cinética para la enseñanza del cálculo diferencial y viceversa, como parte integradora de conocimientos, vinculación entre asignaturas, formación de escenarios escolares, coyunturas académicas, etcétera.

PRIMER ACERCAMIENTO CON ESTUDIANTES EN LOS AÑOS 2003 - 2005

Ejemplificando lo anterior, revisemos algunos de los ejercicios propuestos, primeramente, en las clases de física y posteriormente en las clases de matemáticas:

El siguiente problema se plantea en clases de física con alumnos de tercer semestre del nivel medio superior, principalmente del IPN. Este problema lo revisaremos, en esta tesis, de dos formas: 1) de acuerdo a una clase tradicional de física y 2) como lo he revisado y estudiado en las clases de cálculo diferencial; comento que también sería conveniente revisarlo en las clases de cálculo integral como preámbulo de enlace y vinculación entre el concepto de movimiento y el concepto de la integral.[19] Cabe reiterar que la asignatura de física se comienza a impartir a los alumnos de tercer semestre, la asignatura de cálculo diferencial a los alumnos de cuarto semestre y la asignatura de cálculo integral a los alumnos de quinto semestre, todos del nivel medio superior. La intención de revisar, en primera instancia, este problema es por que fue mi primer acercamiento de "manera formal" para visualizar la necesidad de vincular los conocimientos adquiridos por los estudiantes en las diferentes asignaturas (física y matemáticas), con la intención de tratar de evitar, en los estudiantes, una segmentación de conocimientos que provocan en ellos una utilidad momentánea; sólo cuando revisan el tema en clase y cuando realizan su examen, principalmente. Además, veremos más adelante como la vinculación entre asignaturas le ha ayudado al estudiante a hacer propio el conocimiento recibido.

19 Estas vinculaciones se llevaron acabo a partir del año 2006 hasta la fecha.

Enunciado del problema:

Un corredor, en una carrera de 100 metros, acelera desde el reposo hasta la velocidad máxima a razón de 2.8 m/s^2 y mantiene esa velocidad hasta el final de la pista. (a) ¿Qué tiempo transcurrió durante la fase de aceleración? (b) ¿Qué distancia recorrió el corredor durante la fase de aceleración si el tiempo total en la pista (en el recorrido de los cien metros) fue de 12.2 s?

Veamos la primera forma, sentido estrictamente propuesto en una clase tradicional de física:

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Fase de aceleración   velocidad constante = velocidad máxima = $\mathbf{V_f}$

X_1 $\mathbf{V_f}$ $X_2 = 100 - X_1$

(distancia recorrida en la fase de aceleración)   (distancia recorrida en la fase de velocidad constante)

t_1 $t_2 = 12.2 - t_1$

(tiempo utilizado en la fase de aceleración)   (tiempo utilizado en la fase de velocidad constante)

$\mathbf{V_f}$ (velocidad máxima alcanzada)

Ahora, la explicación que se le da al alumno de acuerdo con la gráfica es:

- sabemos que el corredor tiene velocidad cero en el extremo izquierdo de la gráfica; es, decir **Vo** = 0, donde **Vo** es velocidad inicial.

Posteriormente, se le ofrecen al alumno las fórmulas que él puede utilizar para resolver el problema, y se deja que él realice lo demás:

$$V_f^2 = Vo^2 + 2ax$$
$$V_f = V\,o + a\,t$$
$$X = V\,o + ½\,a\,t^2$$
$$X = ½\,(V_f + V\,o)\,t$$

Cabe mencionar que la interpretación de este problema se le dificulta al estudiante y rara vez hay algún estudiante que lo termine o que lo pueda plantear. Debo aclarar que al estudiante se le ofrecen ciertas indicaciones para resolver el problema; dichas indicaciones suelen ser las siguientes: pueden usar cualquiera de las fórmulas arriba mencionadas, siempre y cuando tengan tres datos para cada fase, o si tienen solamente dos datos entonces muy seguramente tengan que formar un sistema de ecuaciones cuyo resultado final sea una ecuación cuadrática, etc.

También, es importante mencionar que este problema se propone como uno de los últimos ejercicios del tema de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, anteriormente ya se hicieron una serie de ejemplos y ejercicios, en el aula de clase, tanto de movimiento rectilíneo uniforme como de movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Normalmente, el profesor termina resolviendo el problema; la propuesta que ofrece el profesor es:

Considerando las fórmulas necesarias y sustituyendo valores:

Fase de aceleración:
Datos:
$V_o = 0$
$a = 2.8\ m/s^2$

$V_f^2 = 0^2 + 2(2.8)\,X_1$ ________________ 1
$V_f^2 = 5.6\,X_1$
$X_1 = 0 + ½\,(2.8)\,t_1^2$ ________________ 2
$X_1 = (1.4)\,t_1^2$

Combinando las ecuaciones 1 y 2, tenemos la siguiente expresión, que la podríamos llamar la ecuación 3:
$V_f^2 = 5.6\,(1.4)\,t_1^2$
$V_f^2 = 7.84\,t_1^2$
$V_f = 2.8\,t_1$ ________________________ 3

Fase a velocidad constante (pasamos al tramo 2):

$V_f = X_2 / t_2$
$V_f = (100 – X_1) / (12.2 - t_1)$ 4
$V_f = (100 – 1.4\,t_1^2) / (12.2 - t_1)$

La ecuación 4 la igualamos con la ecuación 3:

$2.8\,t_1 = (100 – 1.4\,t_1^2) / (12.2 - t_1)$

Desarrollamos y simplificamos, obteniendo:

$1.4t_1^2 - 34.16t_1 + 100 = 0$

Resolvemos la ecuación cuadrática obteniendo dos valores de $t_1 = 3.4$ y $t_2 = 21$ segundos. Obviamente, el valor que consideramos es $t_1 = 3.4$ segundos, el otro valor sale de la realidad del problema. Las demás incógnitas las determinamos sustituyendo t_1. Todo lo anterior, también, se le menciona al estudiante.

Ahora, veamos el tratamiento que he propuesto en la clase de cálculo diferencial y actualmente en las clases de física (si hay tiempo para enseñarlo). A este tratamiento lo hemos llamado la segunda propuesta.

Usando un método gráfico:
(ruta alternativa)

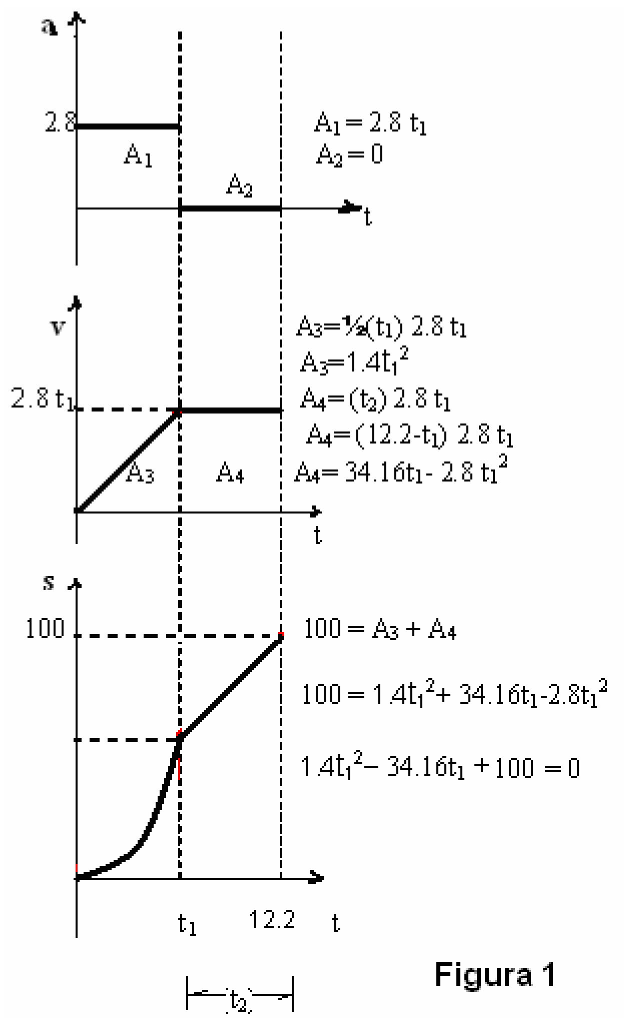


Figura 1

Observamos que en esta segunda ruta, la ecuación de segundo grado que resuelve, prácticamente, el problema aparece en la gráfica de la posición con respecto al tiempo.

Ahora, en forma general resumiré los comentarios de algunos alumnos al analizar el problema; el análisis gráfico del problema fue propuesto a estudiantes de diferentes niveles académicos: estudiantes de tercero, cuarto, quinto y sexto semestre del nivel medio superior.

Primeramente, generalizaré algunas observaciones que he detectado desde el año 2003 a la fecha con alumnos de cuarto semestre. Al revisar este problema con alumnos de cuarto semestre, en la asignatura de cálculo diferencial; el estudiante observa como el valor de la pendiente (interpretación geométrica de la derivada) de la gráfica posición-tiempo ofrece como resultado la gráfica de la rapidez, y como el valor de la pendiente (interpretación geométrica de la derivada) de la gráfica rapidez vs. tiempo ofrece como resultado la gráfica de la aceleración.

Los comentarios y conclusiones que se le dan al estudiante de cuarto semestre son:

1.-Recuerdan que este problema se revisó en la asignatura de física I, el semestre pasado (este comentario se le hace al estudiante antes de iniciar la resolución del problema).

2.- Observen que las áreas generadas por la aceleración y el tiempo nos ofrecen las ordenadas de la gráfica rapidez vs tiempo, y las áreas generadas por la rapidez vs. tiempo nos ofrecen las ordenadas de la gráfica posición vs tiempo.

3.- Vean las relaciones entre las pendientes de las gráficas generadas por la rapidez y el tiempo y las gráficas de la aceleración vs tiempo; así como las pendientes de las gráficas generadas por la posición vs tiempo con las gráficas de la rapidez vs tiempo.

4.- Analizando las gráficas de arriba hacia abajo se está revisando el cálculo integral (que ya lo verán ustedes en el próximo semestre), y analizando las gráficas de abajo hacia arriba se está revisando el cálculo diferencial. Cabe aclarar que los comentarios anteriores pueden ser más específicos y completos, lo cual depende de cada profesor.

Los comentarios anteriores han sido ofrecidos al estudiante como preámbulo para iniciar y analizar el problema y aplicar el concepto de la derivada, teniendo así un panorama no estrecho de vinculación y relación entre lo anterior y lo posterior (sus asignaturas de tercero y cuarto semestres). Dichos comentarios se han expuesto a los estudiantes, en el aula de clases, durante la primera mitad de su semestre. Son alumnos que por primera vez están trabajando con la herramienta de la derivada.

Después de estos cuatro comentarios el estudiante comienza a realizar preguntas y propuestas ya sea con su compañero de banca o abiertamente para todo el grupo. Los comentarios que se escuchan son:

- ✓ -Si hubiera conocido esta forma de plantear los problemas en física no hubiera tenido tantos problemas y no tendría que haberme aprendido de memoria las fórmulas del movimiento uniformemente acelerado-.[20]

20 Realmente el interés por parte del alumno para aprender más y por parte del profesor para enseñar más se ve limitado por los horarios de matemáticas y física que tenemos, como institución nos enfrentamos a una gestión no actualizada que no ha avanzado con los cambios que está teniendo, aún el propio Instituto Politécnico Nacional. Por ejemplo, si hacemos comparación con otros países tenemos que los estudiantes de ingeniería o los que se preparan para ingresar a una escuela de ingeniería tienen 15 o hasta 18 horas a la semana de matemáticas y 14 de física.

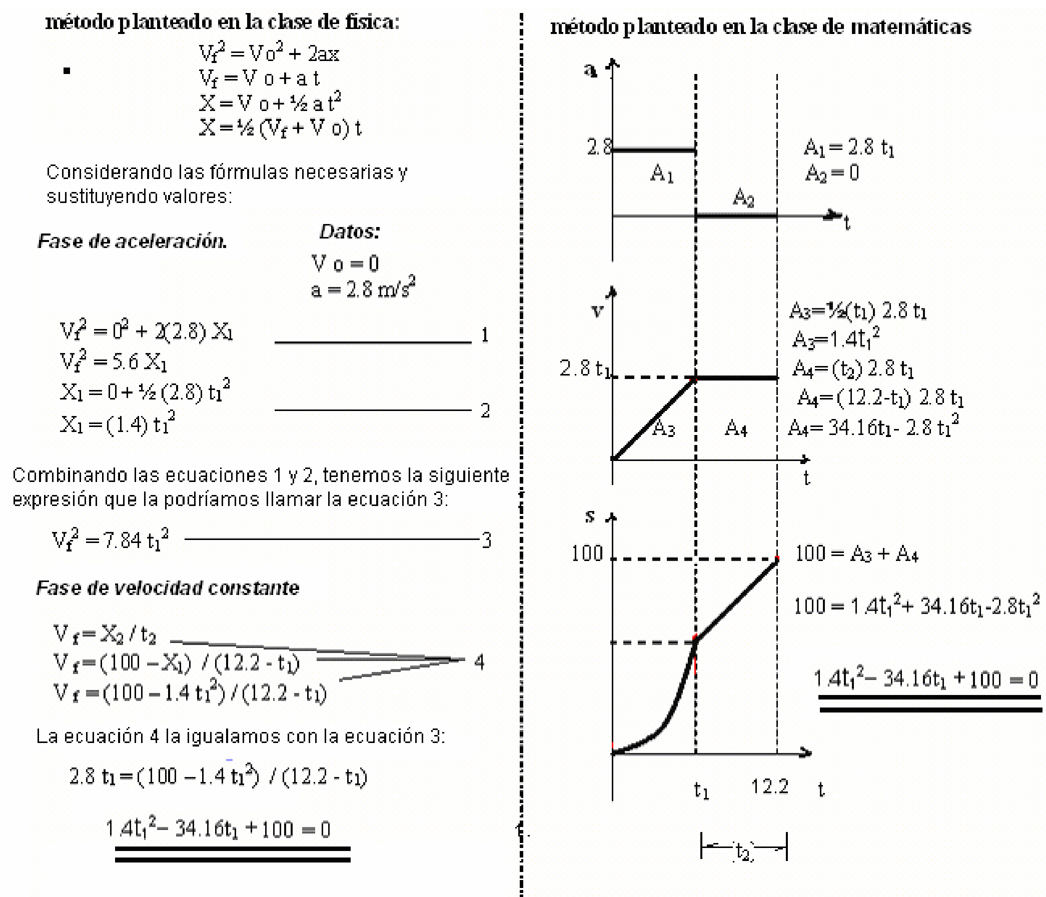
- ✓ -Ah, entonces la derivada de la rapidez con respecto al tiempo es la aceleración y la derivada de la posición con respecto al tiempo es la rapidez.- Observemos como este análisis le permitió al estudiante tener más claridad sobre sus conceptos matemáticos y físicos.

- ✓ -Aquí tenemos la relación de la física y la matemática-.
- ✓ -¿La derivada de la aceleración con respecto al tiempo que cambio físico ofrece? Observemos esta pregunta;- aquí el estudiante ya está manifestando la palabra cambio, la derivada ya dejo de ser para él solamente una operación.
- ✓ -Ahora entiendo por que solamente estudiamos el movimiento con aceleración constante-. En este estudiante se ha manifestado el porqué de las limitaciones de sus estudios anteriores.
- ✓ -Entonces, se pueden resolver así todos los problemas del movimiento uniformemente acelerado-. Aquí debo aclarar que algunos estudiantes vuelven a revisar sus problemas de física, pero ahora los intentan resolver con esta visión.

El interés crece en el estudiante para crear su propio conocimiento.

- ✓ Cuando la velocidad es constante en t_2 su aceleración es cero; ahora entiendo por que la derivada de una constante es cero. Aquí observamos, en esta alumna, que la derivada de una constante tiene un nuevo significado para elle; un concepto más real, más cercano, o tal vez más natural. La derivada de una constante la ha relacionado con su entorno, y por lo tanto su conocimiento se ha extendido y se ha reforzado. La derivada de una función constante dejó de ser una definición abstracta, una simple fórmula que hay que recordar para poder derivar funciones.

Finalmente y con la intención de reforzar la vinculación entre asignaturas, se le muestra al estudiante una imagen que resume las dos propuestas, la imagen es la siguiente:



Para ambos casos se debe resolver la ecuación.

Figura 2

Ahora, observemos lo que sucede en las clases de matemáticas y de física con los mismos alumnos de tercero y cuarto semestres pero atendiendo los objetivos, planteamientos, necesidades y expectativas, tanto del profesor como del estudiante:

En la clase de física (una clase de física común), la intención del profesor es que el alumno después de haber realizado varios ejercicios de movimiento uniformemente acelerado, aplicando las formulas específicas para cada problema, intente él descubrir por sí solo las variantes que pueden existir en el planteamiento de problemas y en la utilización de las fórmulas; lo anterior se observa cuando el profesor indica: recuerden que pueden usar cualquiera de las fórmulas arriba mencionadas, siempre y cuando tengan tres datos para cada fase, o si tienen solamente dos datos entonces muy seguramente tengan que formar un sistema de ecuaciones cuyo resultado final sea una ecuación cuadrática.

En las clases de matemáticas, tanto de cálculo diferencial como integral, considerando una ruta diferente, la intención es relacionar los conceptos vistos en cinemática con los conceptos de áreas bajo la curva, suma de estas áreas y pendientes de las rectas, elementos matemáticos naturales del cálculo.

Regresando al problema, quiero mencionar que éste fue el primer acercamiento que consideré para relacionar la física y la matemática, ya que dicho problema siempre había sido una dificultad para el alumno.

Segundo acercamiento con estudiantes de tercero a quinto semestre, en el periodo 2004-2007.

Las observaciones que resumiremos a continuación son de alumnos de tercero, cuarto y quinto semestres. Primeramente, se plantearán los problemas que se revisaron con ellos; después de cada problema se expondrán los comentarios de los estudiantes, y a la par algunas de mis observaciones.

A continuación, mostraré algunos problemas que se presentan con la solución enfocada en la vinculación entre asignaturas.

Problema 2.
Una paracaidista, después de saltar, cae 52.0 m sin fricción. Cuando se abre el paracaídas, ella desacelera a razón de 2.10 m/s^2 y llega al suelo a una velocidad de 2.90 m/s. (a) ¿Cuánto tiempo estuvo la paracaidista en el aire? b) ¿A qué altura comenzó la caída?
Veamos la propuesta de resolución gráfica que se propone al alumno:

Observemos, primeramente, el tratamiento que se le da a este problema en las clases de cálculo diferencial. En la clase de cálculo diferencial este problema es tratado con cuidado ya que los programas de estudio de cálculo diferencial indican el estudio de curvas suaves, por un lado y por el otro el estudiante visualiza que los puntos de inflexión no son exclusivos de funciones algebraicas cúbicas. Es necesario que aquí haga un paréntesis, para aclarar que este problema se revisará más detalladamente en el capítulo 4, donde se analizarán las estrategias para usar este problema, junto con otros dos, en una secuencia didáctica de clase; observando los ambientes escolares que se generan en el aula de clases y las respuestas que ofrecen los alumnos en dichos ambientes.

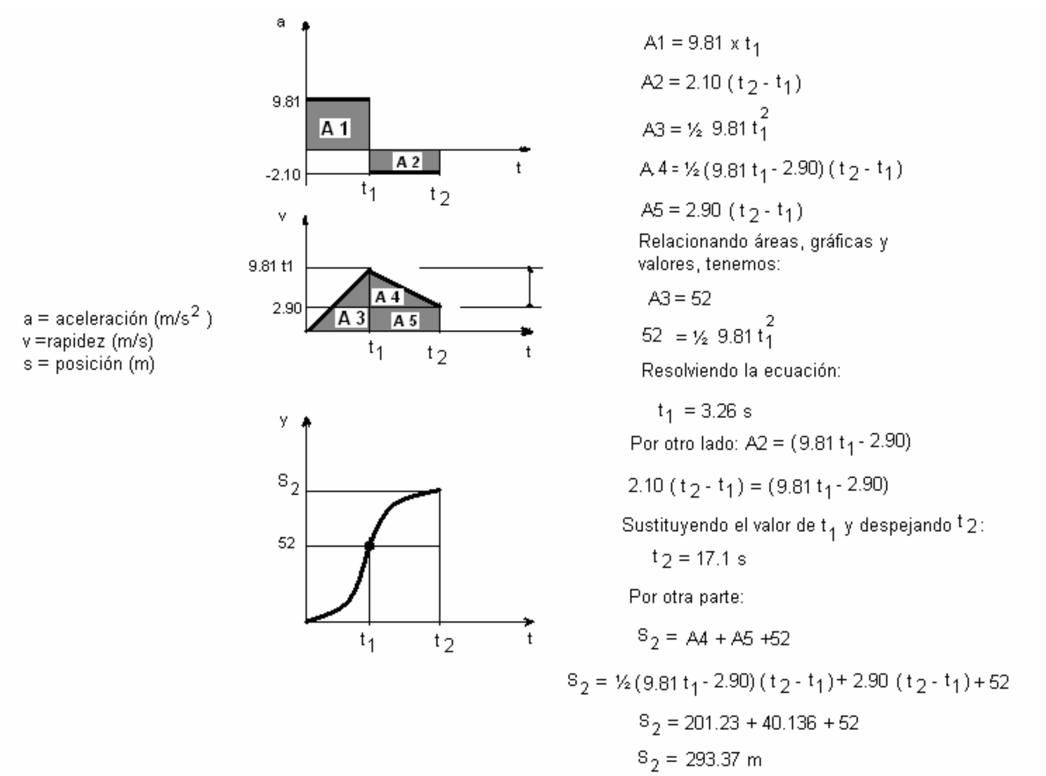


Figura 3

Continuando con la generalización del análisis de este problema, en la vinculación de ciencias para la enseñanza de las matemáticas, diré que uno de los puntos importantes que se deben destacar en referencia a lo que se pretende que observe el estudiante, en cálculo diferencial; es que el punto de inflexión ya dejo de ser, para el estudiante, exclusivamente un cambio de concavidad en una curva, o un proceso algebraico de doble derivación. Ahora, para ellos es un cambio de aceleración, según sus comentarios:

- ✓ ¡Ah! el punto de inflexión es donde la paracaidista abre el paracaídas- ,
- ✓ -sí es un cambio de aceleración pero con sentido diferente.-
- ✓ -¿es está la tercera derivada?-Necesitamos estudiar más gráficas.

Lo que observa el estudiante es que la tercera derivada de la posición con respecto al tiempo, sí es un cambio de aceleración y lo ha comprobado con un problema de antaño, visto en el semestre anterior en la materia de física.

Hay algunos estudiantes que manifiestan interés en proponer la función de las tres gráficas; esta propuesta se verá en el capítulo 4. Otros comentarios de los estudiantes que se escuchan en el aula de clases son:

- ✓ ¡Mira!, aquí hay una aplicación de las gráficas en trozos.
- ✓ ¿Realmente esa será la gráfica de la posición con respecto al tiempo?
- ✓ Y esto es solamente una aplicación de la derivada.
- ✓ Este problema me hace recordar un problema de física experimental, donde tenía las bases teóricas pero las apliqué mal, y esto fue por que no consideré incertidumbres reales y pensamos que todos los problemas se resuelven de la misma forma.

De acuerdo a lo anterior y como ya lo he mencionado, esta segunda ruta de analizar un problema vinculando la física y la matemática también se puede utilizar con alumnos de quinto semestre, en la asignatura de cálculo integral.

Dirigiéndonos exclusivamente a la resolución del problema, obviamente en la forma gráfica, observemos que las áreas que se están calculando son, exclusivamente, áreas de triángulos y rectángulos que el estudiante ya ha trabajado. Nuestro interés en las asignaturas de cálculo diferencial y física I no es calcular el área bajo la curva de la parábola generada en la gráfica de la posición vs tiempo, se puede calcular pero sería conveniente que de tratará en el aula de clase y hasta quinto semestre, en la asignatura de cálculo integral.

Por otra parte, en este ejercicio nuevamente observamos que el alumno relaciona los conceptos de cinemática con la propuesta gráfica. Además, debo mencionar, que también este problema se les planteó, por primera vez (2005 y 2006), a alumnos de tercer semestre que habían reprobado la materia de física I y que estaban preparándose para presentar su examen a titulo de suficiencia, es un examen de recuperación para alumnos que no acreditan la materia. Las respuestas escritas que presentaron los alumnos al resolver este problema fueron, primeramente, en forma gráfica y después corroboraron sus resultados realizando nuevamente el problema en forma algebraica. Como podemos observar, los alumnos tuvieron la oportunidad de comprobar sus resultados. La mayoría de estos alumnos, por iniciativa propia, comprobaron sus resultados resolviendo el problema de dos formas diferentes, lo cual les dio mayor seguridad en las posteriores soluciones de problemas de movimiento unidimensional.

Ahora, revisaremos un tercer problema que ha sido revisado tanto en las clases de física I y cálculo diferencial, en tiempos y espacios normales de clase.

Problema 3.

Una roca se deja caer desde la parte superior de un pozo. El sonido de la roca al chocar con el piso (parte profunda) del pozo se escucha 6.5 s después de que se dejo caer. La rapidez del sonido en el aire a temperatura ambiente es de 336 m/s. Calcular la profundidad del pozo.

La propuesta de solución que se propone a los alumnos es la siguiente:

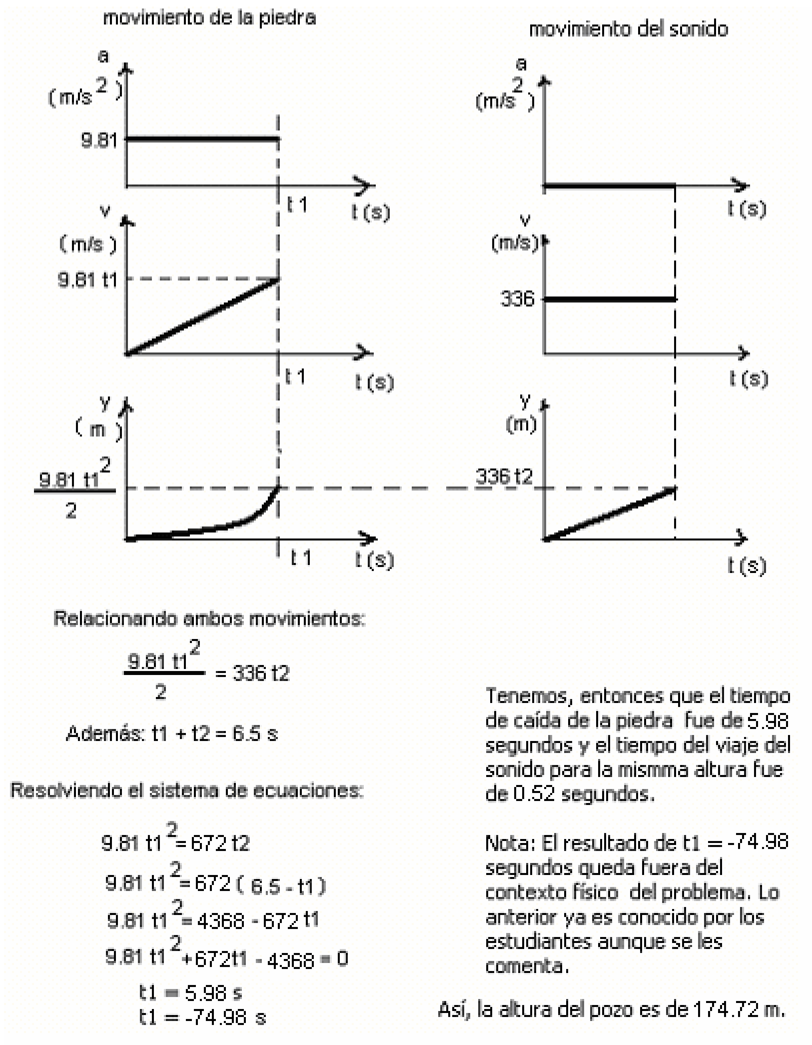


Figura 4

Los comentarios de los estudiantes de tercer semestre, en la clase de física, fueron los siguientes:

- ✓ ¡Ha!. El sonido tiene una velocidad constante por que carece de masa y no afecta la gravedad su movimiento hacia arriba. (Este comentario ha sido muy valioso para mi enseñanza ya que he podido multiplicarlo con otros alumnos, reforzando conceptos de temas anteriores. Los alumnos del nivel medio superior de las escuelas de físico matemático del Instituto Politécnico Nacional antes de revisar el tema de cinemática revisan el tema de estática y es muy complicado para ellos considerar las fuerzas externas que afectan a un cuerpo para que éste esté en equilibrio estático).
- ✓ ¡Claro! Como el sonido no tiene masa no le afecta la gravedad.
- ✓ Será interesante revisar estos fenómenos, nuevamente en cálculo diferencial e integral.
- ✓ ¡Ahora entiendo lo del peso!
- ✓ La misma distancia que viaja la piedra hacia abajo es la que viaja el sonido hacia arriba por eso pudimos igualar las ecuaciones.
- ✓ Ahora entiendo porque nos están enseñando en geometría analítica la recta y la parábola.

Por otra parte, al analizar este problema con los alumnos de tercer semestre en el aula de clases, se ha observado, en el estudiante de dicho semestre, que le ha sido de suma importancia el haber relacionado los dos movimientos, mediante la utilización de las gráficas. Además, el conjunto de ecuaciones que en un momento dado tendría que proponer, el estudiante, realizando el problema en la forma tradicional, utilizando las formulas del M. R. U. A., se ha reducido a una sola ecuación, al relacionar los movimientos. Nuevamente, hago mención de que este otro problema no era muy claro para el entendimiento del estudiante, por lo general este problema no era resuelto por ellos.

Cabe reiterar, en este momento, que estos problemas revisados en tercer semestre, en la asignatura de física I, en el aula de clase y en condiciones reales de tiempos y espacios escolares son el antecedente para revisar la aplicación de la derivada en cuarto semestre en la asignatura de cálculo diferencial y nuevamente, en quinto semestre en al asignatura de cálculo integral.

Si analizamos, nuevamente, la propuesta de solución de estos problemas podemos denotar las interacciones existentes entre el alumno, el profesor y el saber. Situándonos desde una perspectiva de la teoría de las situaciones didácticas; observamos la construcción de escenarios, por parte del profesor, para que el alumno aplique los conceptos físicos aprendidos, utilizando la herramienta matemática con el análisis gráfico; dando hincapié a que el propio alumno verifique sus propuestas de solución, así como sus resultados. Por parte del alumno, denotamos un compromiso de comprobación de resultados usando diferentes métodos de solución, vinculando sus conocimientos de física y matemáticas, su conocimiento no es exclusivamente memorístico, existe una reflexión.

Para establecer lo anterior, es necesario que el discurso matemático escolar sea alimentado de las herramientas utilizadas por otra ciencia, en este caso de la física. Es importante destacar aquí que la valoración que muestre el profesor, tanto de física como de matemáticas, a la materia que él imparte y a la vinculación de ciencias es muy importante.

Tercer acercamiento, en el año del 2007, con estudiantes de quinto y sexto semestre.

Ahora, observaremos los comentarios sobre los problemas anteriores por alumnos de quinto y sexto semestres, los cuales ya han cursado las asignaturas de física I, cálculo diferencial y cálculo integral, pero no había trabajado con la vinculación entre dichas asignaturas. Los problemas se les presentaron en una entrevista individual, fuera del horario de clases y fuera del aula de clases. Los comentarios de cada alumno se resumen a continuación:

Profesor:- ¿Qué piensas de los planteamientos de solución sobre los problemas establecidos?
Primer alumno.- Al observar el texto de un problema físico, lo primero en lo que pienso es en plantear relaciones entre datos para poder así llegar a un resultado. Sin embargo, muchas veces estamos cegados ante varios otros métodos y formas de resolución. Uno de ellos es la forma gráfica, la cual se puede analizar a profundidad, y de ella se pueden concluir ideas, que de haber sido resuelto el problema por otro método no hubiese sido posible concluir dichas ideas.

Por otra parte, para poder resolver problemas de forma gráfica es necesario tener claros los conceptos básicos para poder tener una comprensión del 100%. La ventaja de trabajar con gráficas es la visualización y tendencia de fenómenos, que nos permite "atacar" mejor el problema utilizando tanto el cálculo diferencial como el integral o la geometría analítica. Algunas desventajas de trabajar con métodos tradicionales es que nos cegamos y queremos resolverlos a como sabemos. Sin embargo, si logramos abrir un poco más nuestro panorama se puede ver más allá de lo común, obteniendo nuevas ideas e "innovar"-

Profesor.- ¿A qué te refieres con innovar?

Primer alumno.- A que nosotros podamos proponer desarrollos de solución para problemas creados por nosotros mismos, pero para esto es necesario tener imaginación, misma que a veces no tenemos desarrollada.

Por otra parte, también sería conveniente que se apoyarán mutuamente profesores de física, matemáticas y química, pues estas tres ciencias están íntimamente relacionadas.

Profesor.- ¿Por qué crees que sería conveniente este apoyo entre profesores?

Primer alumno.-Si logramos vincular estas tres ciencias, el panorama se abre permitiéndonos pasar de un análisis químico al comportamiento físico del fenómeno para después, con el auxilio de la matemática, calcular posibles eventos a ocurrir. De modo tal que la interrelación entre estas ciencias, forjaría al alumno con un criterio mucho mayor para la resolución de problemas, vinculación y relación de conceptos comprendiendo el porqué y cómo de las cosas.

Profesor:- ¿Entonces, tú crees que con esta vinculación y relación de conceptos te sería más fácil aprender el porqué y como de las cosas?

Primer alumno.- Sí, porque una relación más íntima entre asignaturas, podría facilitar al alumno la comprensión, y podría motivarle así a continuar con le estudio de la ciencia, hacerle saber que en cualquier actividad que realice se verán involucradas muchas cuestiones, que al analizarlas por separado, y luego conjuntado las conclusiones de los análisis faciliten la realización de la actividad, y lo más importante, dejar fuera del plano a los paradigmas.

Profesor.- ¿Qué opinas del problema que se refiere a la caída de la piedra?

Primer alumno.- La impresión que tuve al momento en que me plantearon el problema de la piedra fue un tanto interesante pues empecé a pensar una manera para obtener el resultado utilizando mis conceptos teóricos que hasta este momento me di cuenta que eran insuficientes.
Profesor.- ¿Por qué dices que eran insuficientes?

Primer alumno.- Bueno, tal vez por que no los recordaba.

Profesor.- ¿Los recordaste con las gráficas que se te mostraron o se te complico más el razonamiento de este problema?

Primer alumno.- Después, cuando me mostraron las gráficas del problema, me percaté que la teoría o mejor dicho el procedimiento que había ideado era correcto, pero la gráfica me confirmó de algún modo lo que planteé.

El haberse permitido analizar los problemas de física, desde una perspectiva diferente, permite proponer ideas, la propuesta gráfica en este caso, que ha servido para la vinculación entre asignaturas, le ha permitido al estudiante vincular clases de física y matemáticas. Lo anterior, podemos pensar que también se puede hacer extensivo en muchas otras asignaturas, si es que pudiera buscarse la existencia de dicha relación; obviamente, usando otras coyunturas académicas.

Por otra parte, notemos que esta propuesta de resolución le ha permitido al alumno vincular y relacionar conceptos de las diferentes asignaturas. Lo anterior, lo observamos cuando él dice: -De modo tal que la interrelación entre estas ciencias, forjaría al alumno con un criterio mucho mayor para la resolución de problemas, comprendiendo el porqué y cómo de las cosas**.-**

En conclusión, podemos decir que la relación y vinculación de la matemática y la física en los discursos escolares ofrece, al estudiante, mayores posibilidades de crear alternativas de análisis y solución a situaciones de clase, como por ejemplo: la resolución de problemas, ejercicios, comprensión de conceptos, más expectativas de relación entre lo real y lo abstracto, etcétera; así como de formar criterios propios de contextualización, los cuales son respaldados por sus conocimientos ya bien establecidos en él; lo que le permitirá, muy seguramente, una mayor creatividad.

Ahora, revisaremos los comentarios sobre estos problemas, realizados a un segundo alumno de sexto semestre. La entrevista a este segundo alumno fue en las mismas condiciones que el primer estudiante, y en el 2007. Este alumno también tiene un desempeño alto.

Profesor:- ¿Qué piensas de los planteamientos de solución sobre los problemas establecidos?

Segundo alumno.- Viendo los problemas desde este punto de vista; las gráficas que son conceptos matemáticos, y las bases teóricas de la velocidad que son conceptos físicos, en conjunto me ayudaron a comprender mejor el problema.

Profesor.- ¿Por qué te ayudaron a comprender mejor el problema?

Segundo alumno.- Por que ahí me percate que efectivamente la física y las matemáticas en conjunto nos pueden brindar las herramientas necesarias para resolver problemas físicos.

Profesor.- ¿Lo anterior te podría ayudar a establecer una idea más clara sobre el concepto de movimiento, recuerdas dicho concepto?

Segundo alumno.- Sobre el concepto de movimiento podemos indicar tres puntos necesarios para el mismo; que son el sistema de referencia, el transcurso del tiempo para un evento dado y el cambio de posición, y para obtener estas conclusiones tuvimos que relacionarlos con una gráfica.

Profesor.- ¿Qué opinas del problema que se refiere a la caída de la piedra?

Segundo alumno.- Considero que sería de utilidad utilizar este método por que de esta manera se ve una perspectiva diferente de las cosas que tenemos cotidianamente en clase al saber de una manera gráfica de donde surge la formula que analiza y determina el comportamiento de ciertos casos donde interactúan la física y las matemáticas en temas de aplicación real, permitiendo con esto, cambiar la idea cerrada de que sólo existe una forma de solución para estos problemas; además de intercambiar conceptos de una materia a otra para identificar puntos en común que tienen entre sí.

Observamos en las conclusiones de este estudiante un interés en la vinculación de la matemática y la física, que mediante un objeto de análisis, como las gráficas, le ha permitido integrar sus conocimientos.

Ahora, revisaremos las respuestas, sobre los mismos problemas, de un alumno de sexto semestre. La entrevista fue hecha en las mismas condiciones, pero este alumno tiene un desempeño medio y adeuda algunas materias.

Profesor:- ¿Qué piensas de los planteamientos de solución sobre los problemas establecidos?

Tercer alumno.- La relación de conceptos entre las diferentes ramas de las matemáticas se debe enfatizar totalmente.

Profesor.- ¿Por qué dices que se debe enfatizar esta relación?

Tercer alumno.- por que esto ayudaría al alumno a tener un mejor análisis de los problemas, provocando que se refuercen los conocimientos adquiridos y se tenga una mayor racionalización del problema, creando en el alumno una mente abierta.

Profesor.- ¿Crees que esta forma de tratar los problemas generaría más interés en ti?

Tercer alumno.- Sí, esta forma de tratar los problemas traerá como resultado una mejor preparación y alumnos más eficientes en el análisis. Además, se crea una atmósfera de interés y no de fastidio, pues yo sentí curiosidad por encontrar el porqué de las diferentes formulas o leyes que se aplican en la resolución de los problemas; así cuando se presente un problema real se podrá atacar de diferentes maneras.

Profesor.- ¿Qué consideras como de mayor trascendencia, hacia ti, al revisar los problemas de esta forma?

Tercer alumno.- Creo que el punto más importante a atacar con respecto al los problemas propuestos es que podría relacionar las diferentes materias, lo cual es sin duda un análisis más abierto que hace que reforcemos nuestros conocimientos y nos permite ver, además, que tanto hemos aprendido.

Como podemos observar en las respuestas de estos tres estudiantes, nuevamente se manifiesta en ellos el interés y lo conveniente que sería para ellos que matemáticas y física trabajarán en conjunto. Lo que he llamado en forma general; la vinculación entre asignaturas para la enseñanza de la matemática y/o de la física.

En conclusión, podemos observar que los análisis que hacen los estudiantes, tanto en forma individual como en equipo, son semejantes; si comparamos las respuestas de los alumnos de sexto semestre, que fueron entrevistados en forma individual, en tiempos y espacios que no correspondían a los horarios de clases, con las respuestas de los alumnos de tercero y cuarto semestres, respuestas obtenidas en clases y horarios cotidianos, tienen un término común: a integración de conceptos mediante actividades donde se involucre la vinculación entre asignaturas o como ellos lo han llamado vinculación entre ciencias. Por lo que tenemos que el trabajo colaborativo entre profesores de ambas academias es trascendente para la propuesta de escenarios escolares diferentes; los cuales deben satisfacer el interés, curiosidad y necesidades de respuesta del estudiante. Por otra parte, debemos de aclarar que el trabajo colaborativo entre academias no es fácil de realizar, ya que el trabajo en equipo en la misma academia es, en ocasiones, muy difícil de conseguir.

La vinculación entre la física y la matemática, como podemos observar, ha favorecido el interés del estudiante en la ciencia misma, así como la investigación del profesor (aspectos necesarios para la relación enseñanza-aprendizaje). La enseñanza de la matemática requiere del conocimiento de los tiempos en que vive la sociedad, sus necesidades y las expectativas que la misma sociedad tiene sobre su aprendizaje; es necesario entonces que los objetivos de enseñanza planteados por las instituciones sean congruentes con los de los profesores y alumnos. La enseñanza de la matemática en vinculación con la física, en términos particulares el cálculo diferencial e integral en vinculación con la dinámica y en forma específica la vinculación del concepto de la derivada con el concepto de movimiento, muestra en forma local la necesidad actual de integración de las ciencias. El estudio al que se enfoca esta investigación es explorar las formas de lograr la vinculación de la matemática y la física, y en forma específica el auxilio de la dinámica para vincular el concepto de derivada con el entorno y las necesidades del estudiante, en los tiempos de post modernidad que vive nuestra sociedad. Es necesario aclarar que la vinculación entre asignaturas para la enseñanza de las matemáticas se debe fomentar desde las mismas academias escolares. Resulta conveniente revisar, en primera instancia, lo que se está haciendo en otras academias de la misma institución, para proponer al estudiante escenarios de vinculación que le sean familiares.

CAPÍTULO 4

El ambiente escolar enmarcado en la vinculación entre asignaturas para la enseñanza de las matemáticas.

Existen diferentes formas de observar y analizar las respuestas ofrecidas por los estudiantes al realizar una tarea matemática, como las entrevistas clínicas; las cuales están guiadas por un protocolo (Clement, 2000) (citado por Ruiz, 2006). En esta investigación no se revisaron las respuestas ofrecidas por los estudiantes mediante entrevistas clínicas, se uso un protocolo; que se integró al revisar los conocimientos matemáticos vinculados en otras asignaturas. Las entrevistas fueron realizadas, para identificar en el estudiante las posibles vinculaciones que puedan tener sus aprendizajes matemáticos en otras asignaturas, principalmente en física, o en su vida diaria.

Debo aclarar que dichas ideas fueron estudiadas en el aula de clases, en la materia de matemáticas, en tiempos y espacios de clases establecidos por la institución; es decir, dentro de los programas de estudio establecidos por la misma. Las entrevistas que se realizaron a los estudiantes sí son guiadas por un protocolo (tal como en las entrevistas clínicas); el protocolo está encaminado a revisar el cómo vincula el estudiante sus aprendizajes matemáticos, en específico el concepto de la derivada, en otra asignatura, como la física. Entonces, la intención de las entrevistas realizadas a los estudiantes muestra que tanto pueden aplicar sus conocimientos matemáticos en otra ciencia y como la otra ciencia les ayuda a integrar dichos conocimientos, teniendo de estos una concepción abstracta y otra de relación y aplicación a su entorno. Se trata, entonces, de identificar nociones en dos ciencias diferentes; en la matemática misma y en la física. Lo anterior se realizó manifestando de inicio y dentro del protocolo de la entrevista la relación y vinculación (en tiempo y espacio) que pueden tener los programas de estudio del IPN, en el nivel medio superior.

Veamos primeramente, los programas de estudio de matemáticas y física; en específico los de las asignaturas de cálculo diferencial y física I, respectivamente. Los temas y objetivos son:

Matemáticas
Cálculo diferencial

Temas:

1.- Función

2.- Concepto de límite y cálculo de límites de funciones algebraicas.

3.- Derivada

4.- Primeras fórmulas de derivación (funciones algebraicas).

5.- Interpretación geométrica y física de la derivada.

6.- Puntos críticos y de inflexión de funciones algebraicas.

7.-Problemas de optimización y de razones relacionadas, donde se involucran las funciones algebraicas.

8.-Formulas de derivación de funciones trascendentes.

9.-Límites de funciones trascendentes.

10.- Puntos críticos y de inflexión de funciones trascendentes.

11.- Problemas de optimización y razones de cambio, donde se involucran las funciones trascendentes.

12.-Diferencial.

Objetivos:

El desarrollo del curso de cálculo diferencial contribuye a que los estudiantes adquieran las siguientes capacidades:

1.-Aplicar sus conocimientos matemáticos a situaciones diversas que puedan presentarse a fenómenos y procesos propios de las ciencias.

2.- Utilizar y contrastar diversas estrategias para la resolución de problemas.

3.- Adaptar los conocimientos matemáticos adquiridos a la situación problemática planteada con el fin de encontrar la solución buscada.

4.- Mostrar actividades propias de la actividad matemática como la visión crítica, la necesidad de verificación, la valoración de la precisión y la necesidad de contrastar apreciaciones intuitivas.

5.- Utilizar el discurso racional para plantear acertadamente los problemas, justificar procedimientos, adquirir cierto rigor en el pensamiento científico, encadenar coherentemente los argumentos y detectar incorrecciones.

6.-Expresar oral, escrita y gráficamente en situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente, mediante la adquisición y el manejo de un vocabulario específico de notaciones y términos matemáticos.

7.- Establecer relaciones entre las matemáticas y el medio social, cultural y económico reconociendo su valor como parte de nuestra cultura.

8.- Servirse de los medios tecnológicos que se encuentran a su disposición, haciendo un uso racional de ellos y descubriendo las enormes potencialidades que nos ofrecen.

Ahora, revisaremos los temas y objetivos revisados en física I y física II.

Física I

Temas:

1.-Generalidades.

2.- Errores y mediciones.

3.- Vectores.

4.- Primera condición de equilibrio estático.

5.- Segunda condición de equilibrio estático.

6.- Centro geométrico, centro de masa y centro de gravedad.

7.- Cinemática: movimiento rectilíneo uniforme, movimiento rectilíneo uniformemente acelerado y movimiento circular.

Objetivos:

El Instituto Politécnico Nacional, como institución rectora de la educación tecnológica en México y en el marco del nuevo modelo educativo, promueve la formación integral del estudiante en donde la física contribuye en la formación de investigadores, críticos e innovadores, para el mejoramiento de la vida humana, así como en la transformación y conservación de su entrono propiciando en el alumno el proceso de construcción del conocimiento en donde el profesor como mediador del conocimiento conduzca a realizar actividades experimentales en equipos colaborativos, en ambientes que les permitirán desarrollar las habilidades de observación, reflexión y análisis de fenómenos naturales; con lo anterior se logrará el cambio de actitud con juicio crítico que le permitirá observar los fenómenos físicos y los conceptos serán construidos a partir de ésta metodología; así mismo el estudiante reconocerá a la física como una ciencia experimental, que relacionada con otras ciencias ha contribuido a la explicación y predicción de fenómenos naturales, aplicará el método científico, los procesos de medición y el álgebra vectorial, para comprender su importancia en el desarrollo tecnológico y obtener habilidades específicas para medir y convertir mediciones en el sistema inglés e internacional, realizar operaciones con vectores utilizando la notación de vectores unitarios y del sistema polar, resolver problemas de fuerzas utilizando las condiciones de equilibrio de cuerpos, así como determinar los modelos matemáticos que rigen los diferentes movimientos.

Como podemos observar, los programas de estudio de cálculo diferencial y física I tienen una relación en contenidos que nos permiten vincular conocimientos en nuestros discursos escolares de matemáticas y física. Se denota en los temas y objetivos, de ambas asignaturas, la relación de conocimientos que debe proponerse al estudiante en la enseñanza de la física vista en el tercer semestre y la matemática vista en el cuarto semestre. El estudiante necesita, constantemente, reforzar y aplicar sus conocimientos previos durante toda su formación escolar, en el nivel medio superior y tal vez en los dos primeros semestres de su educación superior. El estudiante al recibir, constantemente, la vinculación de asignaturas y uso de conocimientos anteriores durante su enseñanza de las matemáticas, tendrá la oportunidad de que se formen en él necesidades de búsqueda de respuestas que satisfagan todos sus conocimientos; es decir, sus aprendizajes no serán instantáneos, breves, sin valor, sin significado, innecesarios, etc.

Ahora, veamos en una secuencia de entrevistas y observaciones hechas en el aula de clases, lo que manifestaron los estudiantes; estas observaciones y entrevistas son el resumen del trabajo de investigación realizado desde el 2003 a la fecha. Las propuestas, comentarios y entrevistas están en el marco de la enseñanza de las matemáticas con la inclusión de la vinculación entre asignaturas.

Por otro lado, las entrevistas y observaciones de clase que se presentan a continuación, y que fueron hechas a los estudiantes son de dos tipos: a) en tiempos “normales” de clase, con estudiantes de cuarto semestre que han recibido recientemente los conceptos matemáticos de función, límite y derivada y b) con estudiantes de sexto semestre que ya han cursado las materias de cálculo diferencial y cálculo integral. Con los estudiantes de sexto semestre se hicieron las entrevistas en forma de parejas; las parejas de estudiantes consideradas son de promedios de calificación diferente (en matemáticas): dos alumnos con calificación superior a 9, dos alumnos con calificación entre 7 y 8, y dos alumnos con calificación entre 6 o que aún no pasan la materia y que la están cursando nuevamente.

En primera instancia, las entrevistas que se realizaron a los estudiantes tuvieron como primer objetivo conocer las ideas y aprendizajes que tienen ellos de un concepto matemático que se les ha enseñado en el aula de clase. Se trata, entonces, de buscar mediante problemas, preguntas escritas y orales la idea que tienen los estudiantes con respecto a los conceptos de función, límite y principalmente el de derivada. Con lo anterior, se pretende crear una serie de supuestos epistemológicos y cognitivos, que serán establecidos al revisar los conceptos de función, límite y derivada que tienen un conjunto de estudiantes de la misma escuela pero con diferente grado escolar y calificación. Es preciso aclarar que las entrevistas fueron con alumnos que han tenido diferentes maestros, tanto de física como de matemáticas. Por lo que con lo anterior, también estaremos revisando, de manera muy general, la forma en cómo estudiaron dichos conceptos en matemáticas y como han sido revisados, aplicados o vinculados en física.

También, debo reiterar que esta investigación está principalmente dirigida a la relación de los problemas de cinemática, en específico de movimiento uniforme y uniformemente acelerado, revisados en física, y al concepto y aplicación de la derivada, vistos en matemáticas; pero esto no quiere decir que solamente se hayan observado las relaciones de los problemas de cinemática con la derivada; se tienen en este momento y en forma paralela a esta investigación, la revisión de vinculación de los problemas de cinemática y las ecuaciones paramétricas, vistas en tercer semestre en la materia de geometría analítica; así como el análisis de estudios gráficos, propuestos por la doctora Gisela Montiel para vincularlos con la cinética. También se está revisando la vinculación de problemas cinéticos de física II, vistos en el cuarto semestre, con el cálculo integral, visto en el quinto semestre. Además, existen algunos más que están en idea aún, como los valores absolutos. Obviamente, todo lo anterior está bajo el marco de las necesidades que manifiestan los estudiantes en el aula de clase.

Por todo lo anterior, es hora de ejemplificar la vinculación entre ciencias. Primeramente, se mostrará la secuencia didáctica que se lleva a cabo en las clases de cálculo diferencial. Durante la puesta de la secuencia didáctica explicaré en forma detallada los momentos que va viviendo el estudiante.

Debo aclarar que los problemas que se expondrán a continuación son propuestos a los estudiantes después de que ellos ya han revisado, en el aula de clases, los siguientes temas: funciones, límites, tanto la definición "formal" de límite como reglas algebraicas para calcularlos, la regla general de derivación, fórmulas de derivación de funciones algebraicas, interpretación física y geométrica de la derivada, puntos críticos y puntos de inflexión de funciones algebraicas y algunos problemas de optimización. Los temas anteriores los estudiaron en clase en aproximadamente 55 horas.

Para cada pregunta hecha por el profesor a los estudiantes se anexan los comentarios y respuestas que ofrecen estos, identificando los comentarios de cada ciclo escolar.

Profesor:

1.- ¿Cuál es la definición de la derivada para ustedes?

2003

Alumnos:

- *Una pendiente.*
- *La pendiente de un punto.*
- *La velocidad instantánea.*
- *Una recta*
- *La pendiente de una recta tangente*.

2004

- *Una pendiente.*
- *La pendiente de un punto.*
- *La velocidad instantánea.*
- *Una recta*
- *La pendiente de una recta tangente.*
- *Algo que sirve para resolver sistemas de ecuaciones más fácilmente.*

2005, 2006 y 2007

- *Una pendiente.*
- *La pendiente de un punto.*
- *La velocidad instantánea.*
- *Una recta*
- *La pendiente de una recta tangente.*
- *Algo que sirve para resolver sistemas de ecuaciones más fácilmente.*
- *Una función.*

Observemos que las respuestas de los estudiantes son similares en los cinco años; además, sus respuestas son inseguras; no son muy claras. El contenido manifestado en sus respuestas carece de profundidad.

Las siguientes dos preguntas han tenido respuestas similares, por parte de los alumnos, en todos los años escolares (2003-2007).

Profesor:

2.- Bueno… ¿entonces, cuál es la interpretación de la derivada?

En todos los años que hecho esta pregunta, la mayoría de alumnos se queda sin contestar por un periodo de aproximadamente dos minutos. Se ha creado un conflicto entre lo que es interpretación y lo que es una definición. Después de que los alumnos se quedan analizando las dos preguntas ofrecen respuestas como las siguientes:

Alumnos:

- *Pues es lo mismo.*
- *No entiendo.*
- *Ya me confundí.*
- *¿Hay alguna diferencia?*

Profesor:

3.- Sí, sí hay diferencia pero debemos identificarla, y eso lo tenemos que hacer en conjunto. Y lo haremos en conjunto después de revisar ciertos ejercicios.

Por otra parte, ¿díganme, en dónde aplicarían la derivada en su vida diaria?

Nuevamente, se hace un silencio en el salón de clases, y después de un tiempo, algunos alumnos ofrecen respuestas como las siguientes:

Alumnos:

- *Como usted lo dijo, en cálculos de velocidad.*
- *También, en los problemas que hemos visto de máximos y mínimos.*

Hago un paréntesis aquí para mencionar que las respuestas de los estudiantes no incluyen, en ningún momento, que la derivada les haya servido en alguna otra materia que ellos hayan cursado o que estén cursando a la par que cálculo diferencial.

Las preguntas que se les han hecho a los estudiantes no son problemas algebraicos, no son de la necesidad de una matemática operativa; son preguntas de análisis, de discusión, de propuesta individual, pero que en nuestra enseñanza y aprendizajes matemáticos no están desarrollados tanto en nuestros estudiantes como en profesores.

Por otra parte, también observamos como después de una o dos preguntas el alumno ha llegado a un punto de necesidad de verdades, a un punto de reflexión; es más y como lo veremos más adelante, llegamos a tener ambientes escolares, en el aula de clase, de total y absoluto silencio (como decimos en México: se puede oír el zumbido de una mosca) donde todas las miradas de los alumnos están "puestas" en el pizarrón.

Tal como lo menciona Cantoral, R. (2003) es frecuente observar que el diseño de la clase no contempla como actividad habitual el que los alumnos argumenten sobre los conceptos que se tratan o que ellos directamente expongan sus propias ideas, menos aún que refuten las consideraciones de sus compañeros o del profesor. La mayoría de los alumnos, en sus clases de matemáticas, memorizan y optimizan los conocimientos antes de que verdaderamente puedan integrar conceptos o procedimientos matemáticos. Él opina, que esto se debe a que no pueden de una vez y para siempre asimilar la compleja estructura de las matemáticas mediante prácticas de memorización, perdiendo en consecuencia una visión de lo que “está detrás” de las definiciones y procedimientos asociados a los conceptos y a las técnicas de base de los alumnos, lo que implica un escaso aprendizaje pues no pueden aplicar sus conocimientos adquiridos en la resolución de ciertas tareas matemáticas o extra-matemáticas. Es por ello que, al pretender enseñar un concepto se debe favorecer las diversas miradas que puedan hacerse de los conocimientos y sus relaciones con los conocimientos previos, a fin de que los conocimientos adquiridos anteriormente puedan ir formando una cierta estructura conceptual cada vez más robusta y funcional. Así, el conocimiento matemático se presenta en forma abstracta, sin base empírica, lo que produce en los alumnos una serie de dificultades que inhiben el aprendizaje. En muchos, casos se introducen conceptos dando una propiedad excesiva al marco algebraico o al numérico, dejando de lado el manejo de significados en los dominios visual o verbal. En nuestra opinión, pensamos que resulta conveniente utilizar más la visualización en las clases de matemáticas con el fin de favorecer formas de representación, tanto de conceptos como de procesos, y favorecer de este modo el que se exploren otro tipo de argumentaciones (Cantoral et al, 2003).

Continuando con la secuencia de vinculación entre asignaturas para la enseñanza de las matemáticas en el aula de clases, tenemos el siguiente momento:

Profesor:

Bueno, ustedes recuerdan los problemas de cinemática que revisaron el semestre pasado en física I. Recuerdan las fórmulas del movimiento rectilíneo uniforme, MRU así como las fórmulas del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, MRUA. ¿Qué les permitían hacer esas fórmulas?

Alumnos:

- *Calcular velocidades y aceleraciones.*
- *También, distancia y tiempos.*
- *Las podíamos usar para el tiro parabólico.*

Profesor:

¿Qué me pueden decir de los análisis que hacían?

Alumnos:

- *No nos salían.*
- *Eran complicados.*
- *Yo no los hacía porque no les entendí.*
- *Bueno, a mí sí me salían los resultados de los problemas, aunque me costaba trabajo.*
- *Tal vez no hacíamos los análisis como deberían hacerse porque nos los enseñaron en una semana.*
- *Sí, fue muy rápido.*

Profesor:

Bueno, ¿pero si saben cómo y en dónde aplicar dichas fórmulas?

Alumnos:

- *No.*
- *Sí*
- *Más o menos.*
- *Sí, nos falta un poco.*

Profesor:

¿Tienen bien definidos ambos movimientos?

Alumnos:

- *Sí.*
- *No entiendo la pregunta.*
- *Creo que deberíamos hacer más problemas.*
- *Más o menos.*

Profesor:

¿Han trabajado gráficamente esos problemas?

Alumnos:

- *No.*
- *Bueno, hicimos una o dos gráficas, cuando el problema así lo pedía.*
- *Casi no vimos gráficas.*

Profesor:

¿El tratamiento que le daban a sus problemas lo sintieron más algebraico o vectorial?

Alumnos:

- *Algebraico.*

Profesor:

Bien, ¿qué me pueden decir de la resolución de todos esos problemas con cálculo diferencial, encuentran alguna relación?

Alumnos:

- *Bueno, sí es posible pero sólo los que tengan la función en el enunciado del problema.*
- *Sí de esos, sí vimos algunos.*
- *Bueno, si habla de la velocidad y con la derivada resolvimos problemas de velocidad, entonces si hay resolución de problemas de velocidad con la derivada.*
- *Sí, pero solamente los que tengan la función propuesta.*
- *Tal vez si se puedan resolver más problemas, porque creo que ha eso van dirigidas sus preguntas profesor.* Aquí hago un paréntesis para aclarar que esta respuesta solamente me la han ofrecido en dos ocasiones (2005 y 2007).

- *Yo pienso que sí pero no sabemos cómo.*

Profesor:

Bueno, pues revisaremos tres de los problemas más difíciles de cinemática, según los comentarios de algunos de sus compañeros, cuando llevaron la materia de física I. Estos problemas los revisaremos con las herramientas matemáticas que ya tienen, incluyendo el cálculo diferencial.

La inquietud de los estudiantes va creciendo, se acomodan en sus asientos. El profesor saca el libro de física, que es ya conocido por los alumnos, pues es el libro de texto que utilizan los estudiantes en la asignatura de física.

Se dicta el primer problema: Un corredor, en una carrera de 100 metros, acelera desde el reposo hasta la velocidad máxima a razón de 2.8 m/s^2 y mantiene esa velocidad hasta el final de la pista. (a) ¿Qué tiempo transcurrió durante la fase de aceleración? (b) ¿Qué distancia recorrió el corredor durante la fase de aceleración si el tiempo total en la pista (en el recorrido de los cien metros) fue de 12.2 s? *(Resnick et al, 1999)*

El profesor, solamente por esta vez, utiliza el pizarrón para trazar las gráficas del MRUA. Aunque el profesor tiene las gráficas de todos los problemas en una computadora, es preferible que el alumno vea, para el primer problema, como se van construyendo las gráficas en el pizarrón, con la intención de que el alumno encuentre un ambiente más cercano, más familiar, más de descubrimiento. El profesor realiza, primeramente, la gráfica de la aceleración con respecto al tiempo, después la de la rapidez con respecto al tiempo y por último la de la posición con respecto al tiempo. Estas gráficas ya fueron propuestas en el capítulo 2, explicando en forma general lo que resulta de la vinculación entre ciencias para la enseñanza de las matemáticas. Al estar el profesor realizando cada una de las gráficas, va comentando, a los alumnos, los conceptos de variable, constante, gráfica, función, límite y derivada, que van apareciendo con forme se están realizando las gráficas. El estar comentando, a los estudiantes, todas estas herramientas del cálculo diferencial mientras se van construyendo las gráficas que ayudarán a analizar los problemas vistos, en un pasado reciente, en física, es con el objeto de reforzar sus conocimientos y reafirmar sus aprendizajes, así como el ir creando el ambiente de vinculación entre asignaturas.

Las gráficas son las siguientes:

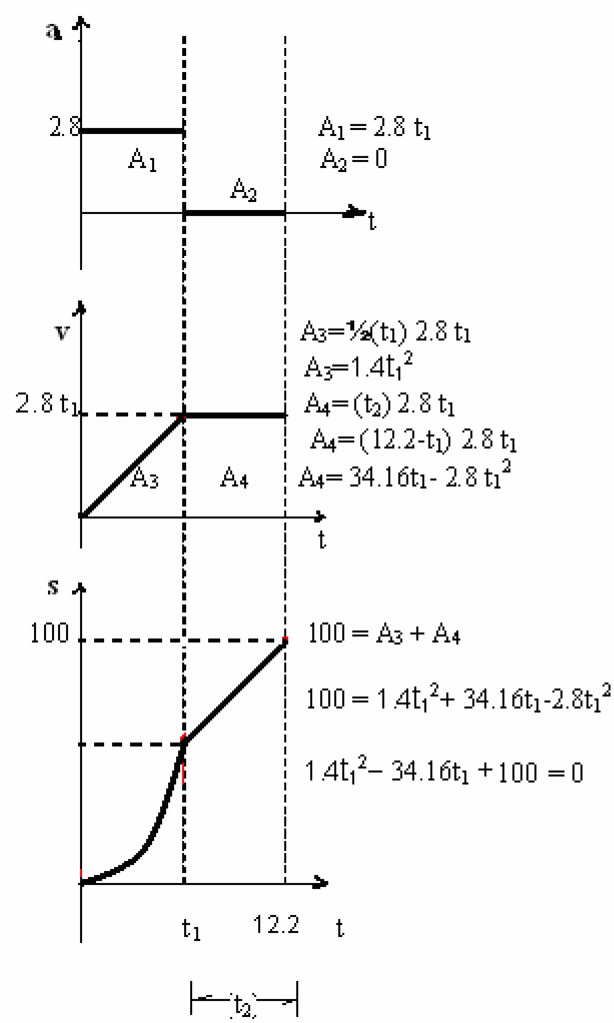


Figura 5

Rescataré algunos de los comentarios hechos por los alumnos y vistos en el capítulo 2, para analizar más de cerca el ambiente que se ha creado en el aula de clases.

- *Cuando la velocidad es constante en t_2 su aceleración es cero; ahora entiendo por que la derivada de una constante es cero.*

Este fue uno de los primeros comentarios que escuche y fue de una alumna que había tenido muy bajas notas de calificación, dicho comentario llamó mi atención por que a esta alumna se le dificultaba el aplicar las formulas de derivación. Para ella no tenia ningún sentido estar derivando funciones y por ello se veían errores de omisión en sus exámenes escritos. Después de este ejercicio, ella prestó más atención a sus tareas matemáticas, las comenzó a entregar completas y se denotó, posteriormente, en ella un interés mayor en la matemática. Ya no era una materia más que tenía que acreditar, aunque fuera con seis, por requisito curricular. La alumna me manifestó en una plática, fuera del horario de clases, que ahora trataba de buscar un sentido o relación a todo lo que ella estaba aprendiendo, tanto en matemáticas como en física. Buscaba hacer propio el aprendizaje que estaba obteniendo. Este comentario fue tal vez de los más importantes para que yo me diera a la tarea de dedicar más tiempo a la enseñanza de las matemáticas vinculándola con física.

- *Ahora entiendo por que solamente estudiamos el movimiento con aceleración constante.*

Además de que en este estudiante se ha manifestado el porqué de las limitaciones de sus estudios anteriores, observamos como está vinculando los programas de estudio de física y matemáticas.

Como podemos observar, los comentarios manifestados por los alumnos son producto de su propio conocimiento, de su intuición, de su reflexión. Tratan de utilizar un lenguaje coloquial para poder explicar situaciones matemáticas.

Como lo menciona Cantoral, en muy pocas ocasiones se utiliza el acercamiento o la “demostración informal” que los alumnos pudieran haber realizado en clase. Por el contrario, se comienza por formalizar un concepto y a presentar una demostración complicada con un considerable rigor matemático, lo cual induce un desánimo entre los alumnos y favores la creencia de que los temas estudiados están fuera de su alcance. En nuestra opinión, consideramos que una manera de motivar la confianza en su propia capacidad para tratar con las matemáticas consiste en apoyarse cada vez más en los propios procesos mentales del estudiante. Respetar más sus conjeturas, sus procedimientos heurísticos, utilizar sus ensayos y exploraciones, dejando que su intuición pueda servir como punto de partida de la actividad de clase (Cantoral, R., et al, 2003).

Siguiendo con la secuencia de ejercicios propuestos, el profesor menciona lo siguiente:

Profesor:

Bueno, ya revisamos un primer problema y hemos observado que nuestros conocimientos matemáticos tienen “movilidad”; es decir, los podemos aplicar en situaciones donde puedan incluirse, lo cual no es una tarea fácil de visualizar, de forma inmediata. Ahora, veamos un segundo problema (el profesor dicta el segundo problema): *Una roca se deja caer desde la parte superior de un pozo. El sonido de la roca al chocar con el piso (parte profunda) del pozo se escucha 6.5 s después de que se dejo caer. La rapidez del sonido en el aire a temperatura ambiente es de 336 m/s. Calcular la profundidad del pozo. (Resnick et al, 1999)*

El profesor, inmediatamente después de dictar el problema, les comenta a sus alumnos: todos recordamos este problema (este problema se revisa casi con todos los grupos de tercer semestre); veamos las gráficas que manifiestan dichos movimientos; ahora el profesor utiliza la computadora y un cañón para mostrar inmediatamente las gráficas:

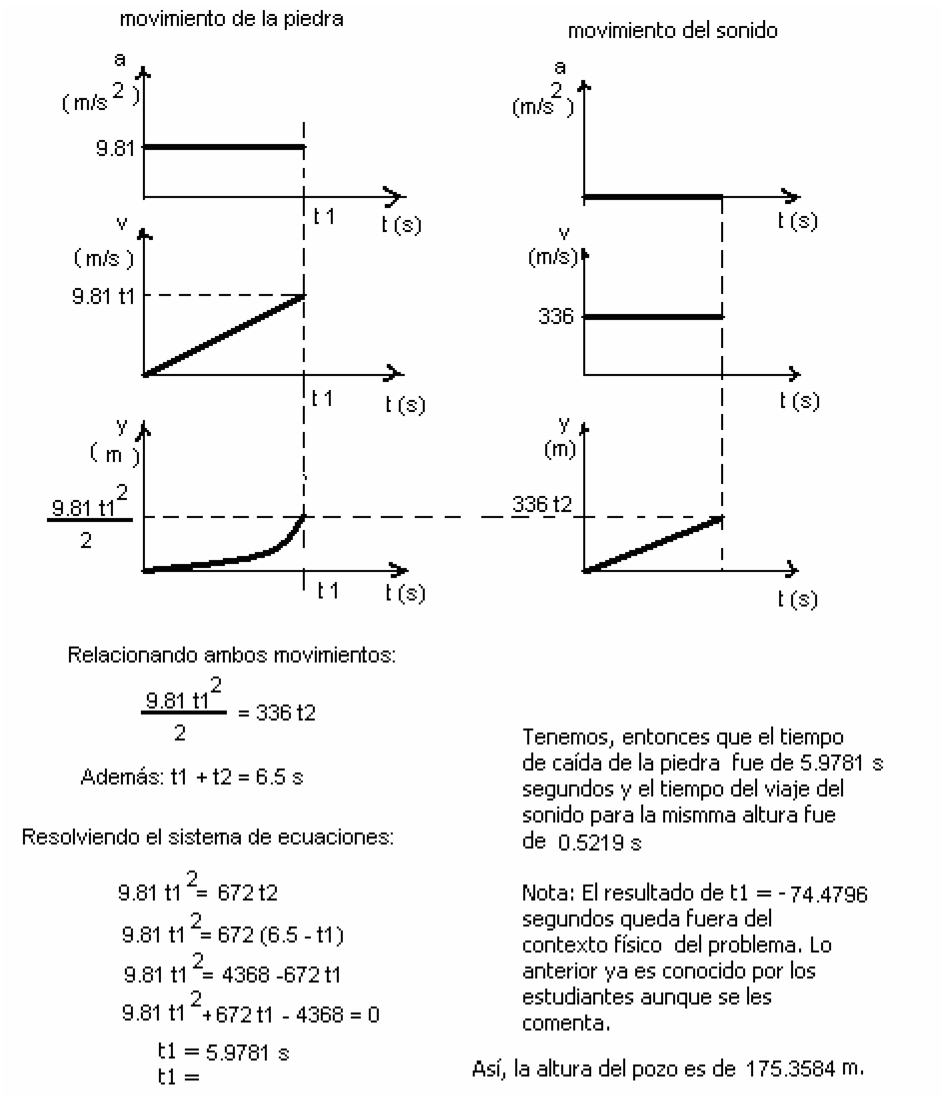


Figura 6

Profesor:

¿Qué me pueden decir de lo que está planteado en las gráficas?

Al igual que en el primer problema, rescataré algunos comentarios de los estudiantes para analizarlos:

Alumnos:

- *¡Ha!. El sonido tiene una velocidad constante por que carece de masa y no afecta la gravedad su movimiento hacia arriba.* Este comentario ha sido muy valioso para mi enseñanza ya que he podido multiplicarlo con otros alumnos, reforzando conceptos de temas anteriores. Los alumnos del nivel medio superior de las escuelas de físico matemático del IPN antes de revisar el tema de cinemática revisan el tema de estática y es muy complicado para ellos considerar las fuerzas externas que afectan a un cuerpo para que éste esté en equilibrio estático.

Además de lo anterior, el comentario de este alumno manifiesta que en él ya hay intuiciones de porque un fenómeno físico se debe de tratar de está forma en matemáticas. También le ha ayudado a recordar conceptos físicos como la masa, el peso, la atracción terrestre, etcétera; es decir, no solamente ha vinculado con la matemática conceptos de cinemática sino que también de estática.

Profesor:

Sí muy cierto, observen las diferencias entre las gráfica de un MRU y un MRUA. Además, observen ustedes, como las gráficas de estos movimientos nos muestran en forma más "divertida" que la derivada de una función lineal es una función constante y que la derivada de una función cuadrática es una función lineal.

Alumnos:

- *La misma distancia que viaja la piedra hacia abajo es la que viaja el sonido hacia arriba por eso pudimos igualar las ecuaciones.*

El ambiente que se va generando cada vez es más rico en discusión grupal, propuestas individuales y por equipos, equipos de dos a cuarto alumnos que se van formando en el transcurso de la clase. La comunicación referida a la clase, entre los estudiantes, es más estrecha, las opiniones son más diversas pero enfocadas al mismo ejercicio, etc. El alumno ha obtenido un medio por el cual puede manifestar abiertamente sus opiniones sobre sus aprendizajes matemáticos y físicos, al estarlos relacionando.

El salón de clases se ha convertido en un lugar de comentarios, conclusiones, conjeturas, casi a todos se les ve participando sobre el ejercicio.

Finalmente, se presenta el tercer problema; el cual es dictado por el profesor pero ahora él deja que los alumnos resuelvan dicho problema. Después de haber dictado el problema, el profesor se espera unos cinco minutos y pasa a revisar lo que están haciendo todos y cada uno de los estudiantes.

Profesor:

Pues bien, vamos por el tercer problema: Una paracaidista, después de saltar, cae 52.0 m sin fricción. Cuando se abre el paracaídas, ella desacelera a razón de 2.10 m/s^2 *y llega al suelo a una velocidad de 2.90 m/s. (a) ¿Cuánto tiempo estuvo la paracaidista en el aire? b) ¿A qué altura comenzó la caída? (Resnick et al, 1999)*

Después de haber transcurrido los cinco minutos, el profesor pasa por entre las filas de bancas de los estudiantes y observa lo siguiente:

- Algunos estudiantes están realizando dos grupos de gráficas; uno para estudiar el movimiento con aceleración positiva y otra para estudiar el movimiento con aceleración negativa.
- Otro tanto de estudiantes está realizando las gráficas tal y como las tiene el profesor en su solución.
- Algunos comparan sus gráficas con sus compañeros de banca.
- Algunos otros preguntan: *Profesor, ¿la aceleración negativa la grafico por debajo del eje x, verdad?*
- Muy pocos (entre 4 y 6) no han realizado cosa alguna. Las explicaciones que ofrecen estos estudiantes, al profesor, de su escasa participación en la propuesta de solución del problema es: -*es que no estaba poniendo la atención debida*- . El profesor les ayuda un poco a estos estudiantes, haciéndoles algunas preguntas:

Profesor:

Registra tus datos en tus gráficas, puedes realizar, primeramente, la gráfica de la aceleración. ¿Cómo la graficarías?, ¿hasta dónde la aceleración es positiva?, ¿a partir de que tiempo empieza la aceleración negativa?, etcétera.

Los estudiantes se integran al grupo de trabajo y comienzan a revisar sus ejercicios anteriores para poder contestar el nuevo problema.

Después de unos quince minutos de que el profesor había dictado el problema dice:

Profesor:

Bueno, vamos a comparar sus resultados con lo que aparecerá en la pantalla.

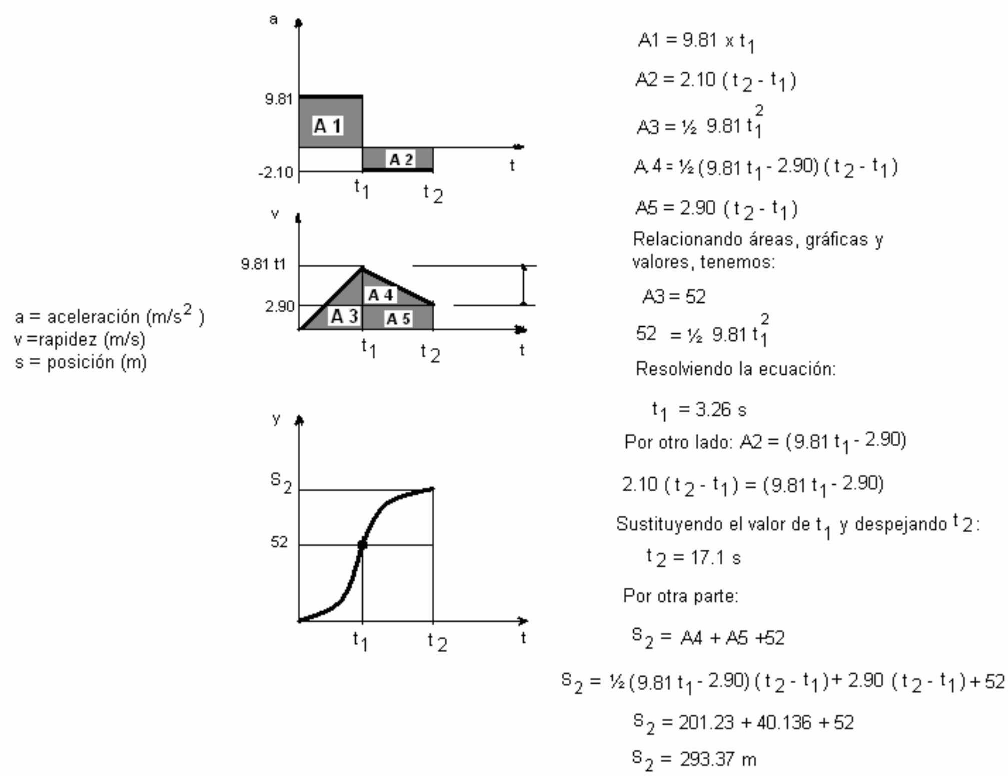


Figura 7

Cuando el profesor hace la presentación de su trabajo a los alumnos, en el salón de clases, se hace un silencio total y todas las miradas de los alumnos están puestas en la pantalla (en los salones existen pantallas para proyectar en ellas trabajos de acetatos o de computadora), este silencio dura aproximadamente entre medio y un minuto. Todos han dejado de escribir y se dedican ha analizar sus resultados con lo que está en la pantalla. ¡Nadie está copiando lo que propuso el profesor, primero lo analizan! Lo anterior, ha sido una gran experiencia para mí, por que normalmente cuando el profesor escribe algo en el pizarrón, hay alumnos que inmediatamente se dedican a copiar lo escrito, sin analizarlo. Se denota en los alumnos una ansiedad de comparar sus nuevas propuestas.

Los alumnos han realizado diferentes gráficas pero apegadas a la realidad del problema. Sus gráficas tiene un sustento físico-analítico; además, sus aplicaciones operativas algebraicas son la parte final del problema.

El profesor, después de observar que los estudiantes han tenido el tiempo suficiente para analizar lo que está en la pantalla, comenta a los alumnos:

Profesor:
Ya que hemos analizado lo que está en el pizarrón, ahora compárenlo con lo que han realizado ustedes.

Hay muchas satisfacciones en los alumnos y obviamente en el profesor, porque muchas de las respuestas (más de la mitad del grupo) están correctas, algunas más tienen detalles que son adecuados para la interpretación que le ha dado el estudiante. Al igual que en los problemas anteriores, rescataré unos cuantos comentarios y anexaré otros más. Los comentarios que hacen los alumnos son los siguientes:

Alumnos:
- *¡Ah! el punto de inflexión es donde la paracaidista abre el paracaídas.*
- *sí, es un cambio de aceleración pero con sentido diferente.*
- *Ya entiendo la aceleración negativa es una desaceleración.*
- *Sí, si la aceleración es negativa, que en este caso está en el eje de las "y" entonces debe ir debajo del eje x.*
- *Sí, es una función constante negativa. ¿Profesor, entonces hay funciones constantes negativas y positivas?*
- *Profesor, ¿la subtangente que interpretación tiene?*

Con la vinculación entre asignaturas para la enseñanza de las matemáticas, utilizando problemas de física para la vinculación, se ha logrado que los estudiantes reafirmen y refuercen sus conceptos tanto matemáticos como físicos. También se ha despertado su interés por conocer más. Sus expectativas de conocimiento se amplían; ahora, ya no se conforma con lo que el maestro les ofrece, él estudiante quiere saber cada vez más y relacionar sus conocimientos con otras áreas del conocimiento; esto lo observamos en la última pregunta que hace uno de los alumnos: *¿la subtangente que interpretación tiene?).*

Otro aspecto importante y que debo resaltar es; las soluciones propuestas por el profesor, tanto en el primer problema, realizado en el pizarrón, como en los dos problemas posteriores, analizados con la propuesta hecha mediante la computadora y el cañón, no tenían incluidas las funciones de las gráficas, los estudiantes las tenían que proponer. Veamos las funciones que propusieron los estudiantes sobre las gráficas para cada problema, así como los comentarios y preguntas que se suscitaron al respecto:

Primer problema.

Primera propuesta

$$a = \begin{cases} 2.8; & 0 \le t \le t1 \\ 0; & t1 \le t \le 12.2 \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} 2.8t; & 0 \le t \le t1 \\ 2.8t1; & t1 \le t \le 12.2 \end{cases}$$

$$s = \begin{cases} 1.4t^2; & 0 \le t \le t1 \\ 2.8t1\,(t); & t1 \le t \le 12.2 \end{cases}$$

Segunda propuesta

$$a = \begin{cases} 2.8; & 0 \le t \le t1 \\ 0; & t1 < t \le 12.2 \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} 2.8t; & 0 \le t \le t1 \\ 2.8t1; & t1 < t \le 12.2 \end{cases}$$

$$s = \begin{cases} 1.4t^2; & 0 \le t \le t1 \\ 2.8t1\,(t); & t1 < t \le 12.2 \end{cases}$$

En la primera propuesta, observamos que los estudiantes ya tienen un conocimiento de las funciones en trozos y reafirman sus conocimientos matemáticos vinculándolos con problemas de física. También, observemos como los estudiantes han tenido que modificar la primera propuesta y proponer la segunda. Veamos como fue este cambio de propuesta.

Profesor:

Ya tenemos las gráficas. Ahora les pregunto; ¿cuáles serán las funciones de dichas gráficas?

Casi de forma inmediata, los estudiantes proponen la función de la aceleración pero sin delimitar los valores del tiempo para cada trozo.

Profesor:

Bien, ¿y cuáles serán los valores correspondientes del tiempo para cada trozo?

La respuesta es ofrecida por algunos alumnos mientras los demás escuchan. La respuesta que ofrecen dichos alumnos es la que está marcada como primera propuesta. El profesor hace otra pregunta dirigiéndose a todo el grupo.

Profesor:

¿Qué piensan los demás de los valores marcados, por sus compañeros, para el segundo trozo de la gráfica de la aceleración, observan los signos de "desigualdad"?

Alumnos:

- *Creo que si la dejamos así ya no sería función porque estamos tocando dos valores de "y" para uno de "x".*
- *Sí, tiene razón la compañera.*
- *Pero así está la gráfica.*
- *Yo creo que los intervalos deben ser como lo habíamos visto antes; el primer trozo con el signo de igual y mayor que, y el segundo trozo con el signo de mayor que, solamente.*
- *Entonces debemos modificar las gráficas y poner "el hueco". ¿Si verdad profesor?*
- *Ahora entiendo lo del límite.*
- *Pero yo recuerdo que en física, las gráficas no tenían huecos. ¿Por qué profesor?*
- *¿Hay diferentes interpretaciones?*

Profesor:

Muy interesantes, sus observaciones y preguntas. Vamos a tratar de contestarlas entre todos. Veamos por ejemplo la palabra: éste, este y esté; el significado de esta palabra depende de la posición del acento. Ahora, cuando hablamos de rapidez o velocidad, algunos decimos metros por segundo y otros metros entre segundo para expresar sus unidades dimensiónales. Se supone que cuando uno está hablando de algo en específico, ese algo tiene un sentido para nosotros, y nosotros damos por hecho que todos lo entienden.

Alumnos:

- *Entonces, si nos dicen metros por segundo o metros entre segundo, nosotros como ya tenemos el concepto se supone que debemos escribirlo como debe de ser.*
- *Sí tal vez físicamente se diga que avanza un metro por cada segundo, y en matemáticas se diga un metro entre un segundo.*

Profesor:

Esa es la idea. Ahora se dan cuenta lo importante que son los conceptos y más aún, que nosotros hagamos propios esos conceptos y los podamos usar en cualquier parte donde sean requeridos.

Alumnos:

- *Profesor, entonces por el texto que llevamos en física, el autor supone que nosotros ya manejamos todo lo que es cálculo diferencial.*

Profesor:

No dudes que así pueda ser. El autor de física se enfoca más a los tratamientos físicos que a los matemáticos.

Alumnos:

- *Creo que ya voy entendiendo.*
- *Yo me confundía mucho antes, cuando decían metros por segundo o metros entre segundo. No sabía por que lo hacían.*

Profesor:

Todo depende de la formación académica, social, cultural, etcétera de quien esté hablando de dicho concepto. Pero aquí y en cualquier parte del mundo sabemos que las unidades de la velocidad son las unidades de longitud, que avance un cuerpo, en unidades de tiempo gastadas o usadas para recorrer dicha longitud.

Alumnos:

- *Entonces la gráfica, realmente debe ser… ¿puedo pasar al pizarrón?*

Profesor:

Claro, por favor.

La gráfica que realiza el alumno es la siguiente:

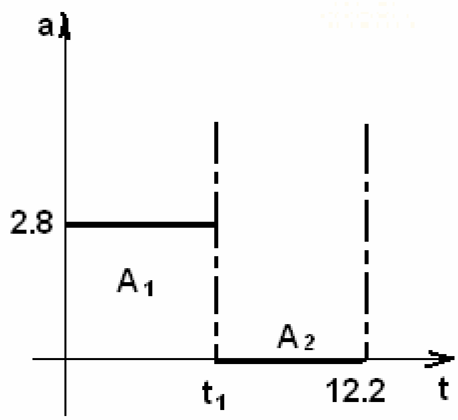


Figura 8

Alumnos:

Profesor, pero también podemos cambiar los signos de desigualdad… ¿puedo también pasar al pizarrón?

Profesor:

Sí, por supuesto.

El alumno invierte el hueco en la gráfica y propone otra función.

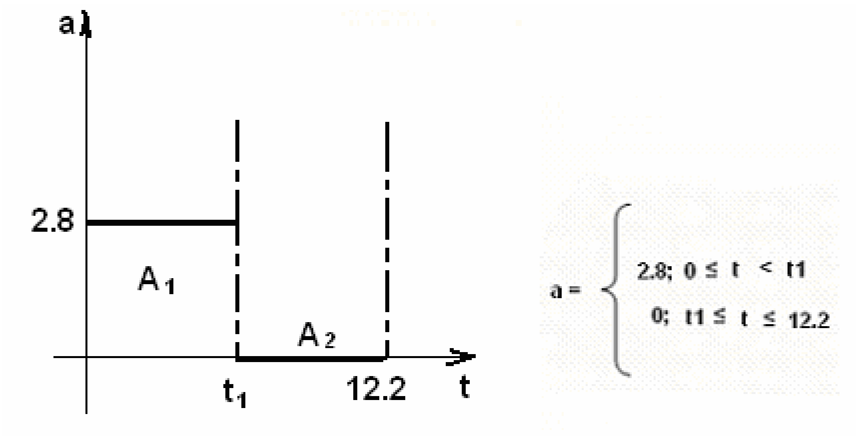


Figura 9

Observando la secuencia anterior, tenemos al estudiante desarrollando y proponiendo las posibles manifestaciones que puede tener para él la interpretación de un problema visto, primeramente, en la clase de física y posteriormente, en la clase de matemáticas. Si esta gráfica se hubiera propuesto, exclusivamente, en la clase de matemáticas como un ejercicio de tantos que se hacen (se propone la función y después se deja al alumno que la grafique o viceversa), muy seguramente no se podría dar un sentido. Esta gráfica de construcción sencilla no hubiera tenido tal significado para el estudiante si la hubiera visto, exclusivamente, en la clase de matemáticas.

Para el alumno, la vinculación entre asignaturas, en la enseñanza de las matemáticas, le ha ofrecido la oportunidad de ser creativo, de “explorar” en él mismo sus conocimientos adquiridos. El alumno ha relacionado sus conocimientos recibidos, tanto en física como en matemáticas.

Segundo problema:

Piedra	Sonido
$a = 9.81$	$a = 0$
$v = 9.81\,t$	$v = 336$
$s = \frac{9.81}{2}t^2$	$s = 336t$

En este problema intervinieron más alumnos y las respuestas de los estudiantes fueron más rápidas que en el primero. Veamos:

Profesor:
Muy bien, pero si hablamos de la misma “s” para la piedra y el sonido, tal como uno de sus compañeros lo comentó y que estuvimos todos de acuerdo, ¿la variable “t” de ambos movimientos sería la misma?

Después de analizar la pregunta, los estudiantes contestan:

Alumnos:

- *Profesor, si la piedra en un segundo viaja 9.81/2 metros, entonces el sonido viaja 336 metros en el mismo segundo. ¿Si está bien o no?, ¿a eso se refiere?*
- *Sí, tienes razón.*

- *Sí pero no, por que la piedra de nuestro problema no viaja un segundo.*
- *Sí, ya entendí.*
- *Creo que yo también.*
- *Sí para nuestro problema podemos condicionar la variable "t" del sonido.*

Los estudiantes después de revisar nuevamente el problema dicen:

- *Sí, creo que la función sería $s = 336\ (6.5 - t)$.*

Varios alumnos asientan con la cabeza, estando de acuerdo con la respuesta.

Profesor:

¿Qué dicen los demás?, ¿están de acuerdo?, ¿Podrían dejar la misma función primera y restringir el campo de variación?, ¿podríamos dar otra alternativa?

Alumnos:

- *Sí, creo que sí. Tal vez sería: $s = 336\ t$; si $t1 \leq t \leq 6.5$.*
- *Pero si $t = t1$, entonces "s" no es igual a cero, y según la gráfica: si $s = 0$, entonces t debe ser cero también.*

Después de un momento de análisis; en este momento de análisis varios estudiantes están escribiendo en su cuaderno, tratando de encontrar una respuesta más satisfactoria, una respuesta que se ajuste al problema.

➢ *Creo que debe ser así: s = 336 t; si 0 ≤ t ≤ (6.5 - t1)*

Tercer problema:

Las funciones del tercer problema se dejan de tarea para la siguiente clase, con la intención de que los resultados sean expuestos por todos los equipos (cada equipo expone sus resultados). Los resultados expuestos por los estudiantes son los siguientes:

$$a = \begin{cases} 9.81;\ 0 \le t < t1 \\ -2.90;\ t1 \le t \le t2 \end{cases} \qquad a = \begin{cases} 9.81;\ 0 \le t < t1 \\ -2.90;\ t1 \le t \le t2 \end{cases} \qquad a = \begin{cases} 9.81;\ 0 \le t \le t1 \\ -2.90;\ t1 < t \le t2 \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} 9.81t;\ 0 \le t < t1 \\ -2.90\,t\ ;\ t1 \le t \le t2 \end{cases} \qquad v = \begin{cases} 9.81t;\ 0 \le t < t1 \\ 11.91\,t1 - 2.10\,t;\ t1 \le t \le t2 \end{cases} \qquad v = \begin{cases} 9.81t;\ 0 \le t \le t1 \\ 2.90 - 2.10\,t + 2.10\,t2;\ t1 < t \le t2 \end{cases}$$

$$s = \begin{cases} \frac{9.81}{2} t^2 \quad 0 \le t \le t1 \\ \text{---------} \end{cases} \qquad s = \begin{cases} \frac{9.81}{2} t^2;\ 0 \le t < t1 \\ 11.91\,t1\,t\ 1.05\,t^2 - 63.42;\ t1 \le t \le t2 \end{cases} \qquad s = \begin{cases} \frac{9.81}{2} t^2;\ 0 \le t \le t1 \\ 38.91\,t - 1.05\,t^2 - 63.69;\ t1 < t \le t2 \end{cases}$$

Observamos en estas respuestas como los alumnos ya expresan sus conocimientos matemáticos en forma propia. No hay copia de resultados por que cada equipo expondrá sus resultados y su exposición es parte de su calificación. Cabe mencionar que cuando exponen sus resultados, cada uno de los equipos, los demás alumnos comparan sus respuestas. Se forman verdaderos grupos de discusión, llegando finalmente a un acuerdo final y a un convencimiento de todos. También nos damos cuenta que algunos equipos han tenido problemas con las gráficas, tal vez no intentan hacer el último trozo de la gráfica posición vs. tiempo por tener dificultades de operatividad algebraica y reconocimientos de elementos en las parábolas, pero esto es de esperarse por que no todos los estudiantes han tenido los mismos enfoques matemáticos en sus semestres anteriores. Ni tampoco los objetivos perseguidos por todos los profesores de física y matemáticas son los mismos, como ya lo hemos mencionado en los capítulos anteriores. Aunado a lo anterior, este problema ha sido propuesto a varios profesores del nivel medio superior y las respuestas que han ofrecido no son las que en un momento se pudieran esperar.

Por otra parte, para resolver este problema se necesita que el alumno tenga un conocimiento de las gráficas generales de las parábolas y rectas, la combinación y relación de variables y constantes, saber que variable despejar, comprobación de resultados por sustitución y saber relacionar bien el concepto de derivada con sus resultados gráficos.

Nosotros, como profesores (ya sea de matemáticas o de física) tenemos, en variadas y numerosas ocasiones, la creencia de que lo que hemos enseñado ya fue bien aprendido por los estudiantes y no nos permitimos observar los alcances o deficiencias que ellos puedan tener con el “nuevo conocimiento”. Cuantas veces hemos enseñado la teoría, luego los ejemplos, que a veces son más de tres, haciendo hincapié en lo que se debe tener “cuidado” para que el estudiante no cometa errores, y al proponer un ejercicio para los estudiantes, ellos lo resuelven mal y cometen los errores en los cuales hicimos hincapié en que no se cometieran o tuvieran cuidado. Es muy complicado para el estudiante tratar de pasar de un método algebraico, a un método gráfico o brincar a un método analítico. El estudiante necesita tiempo para poder establecer dichos cambios en su razonamiento. Por mencionar un ejemplo, yo me he percatado en la clase de física II, cuando se habla del tercer método (relación ímpetu-impulso) para trabajar situaciones cinéticas, que el alumno le cuesta mucho trabajo establecer un tratamiento vectorial a sus ejercicios, normalmente establece un tratamiento algebraico para resolverlos. A pesar de que yo, como profesor, les diga lo que normalmente han cometido como error sus compañeros de semestres anteriores, ellos hacen lo mismo. Una forma de evitar esta repetición de error constante y de permanencia duradera ha sido que ellos observen lo que hacen ellos mismos y sus compañeros, al realizar un "nuevo problema". La revisión se hace en grupo y con "bombardeo de preguntas", incluyendo la vinculación de herramientas matemáticas, como el valor absoluto. Al final, el estudiante se da cuenta de lo que realmente trataba de decir el profesor.

Regresando a la secuencia anterior, debo aclarar que esta secuencia didáctica, donde se ha utilizado la vinculación entre asignaturas para la enseñanza de las matemáticas, se experimentó de formas diferentes: agrupando a los estudiantes por equipos, con un máximo de 4 integrantes por equipo, o en forma individual.

Como lo he mencionado, estos tres problemas también han sido presentados a alumnos de sexto semestre, con diferentes calificaciones en matemáticas y con diferente promedio total de calificaciones. Los comentarios de estos alumnos fueron revisados en el capítulo 2 de esta tesis. Los seis estudiantes vivían momentos diferentes; los de alto promedio estaban recibiendo la noticia de que se habían ganado una beca para ir a estudiar a Francia, los de promedio aprobatorio no tenían ninguna novedad en su transcurso escolar y los de promedio bajo estaban angustiados por que podrían quedar "fuera de reglamento" un año. A pesar de que los estados de ánimo, en los seis estudiantes, eran totalmente diferentes sus respuestas fueron muy parecidas y las podemos resumir como sigue: el unir esfuerzos en la enseñanza de las ciencias como la matemática, física y química puede contribuir para que los estudiantes tengan un aprendizaje con mayores expectativas de aplicación, contenido y utilidad, generando una búsqueda constante de conocimientos más ambiciosos , vinculados y no vinculados, por parte de ellos; lo cual, es necesario para su formación.

La vinculación entre ciencias rompe barreras, acercando en un contexto más estrecho de colaboración; al conocimiento, al alumno y al profesor, dentro del contrato didáctico. Lo anterior, creo es necesario para nuestras nuevas generaciones de estudiantes.

Por otra parte y tal como lo mencioné al inicio de la reflexión didáctica de este capítulo, he tenido la oportunidad de encontrar cada vez más ejercicios, tareas o problemas matemáticos y físicos que vinculan las asignaturas de matemáticas y física; la geometría analítica del tercer semestre, el cálculo diferencial del cuarto semestre, la física I del tercer semestre y la física II del cuarto semestre. El siguiente ejemplo es un problema que se puso en práctica, en este año, tanto con los alumnos donde enseño cálculo diferencial como con los alumnos a los que les enseño física II, ya que fue un problema que se propuso para el examen del segundo parcial de física II, el semestre escolar se divide en tres parciales. Cuando el problema lo resolví tanto en la clase de cálculo diferencial como en la clase de física II, en lo primero que me percaté fue que varios alumnos, más de la mitad, se habían equivocado por que no tenían bien definido lo que era el MRU y el MRUA. Cabe mencionar que los tres problemas revisados anteriormente aún no se les proponían a los alumnos donde enseñaba la materia de cálculo diferencial. Bueno, esta observación me hizo reafirmar mis supuestos sobre el trabajo de enseñanza que se proporciona al estudiante y las creencias que tienen los estudiantes acerca de sus aprendizajes. Otra observación que obtuve de parte de ellos, es que se les hizo muy complicada la forma en que expuse el problema, en el salón de clases. Entonces el estudiante debe tener cierta preparación para poder asimilar ciertos conocimientos. Por lo tanto este problema, que expondré a continuación, muy seguramente formará parte de la secuencia conformada, hasta este momento, por los tres problemas analizados anteriormente; es decir, ya cuando el estudiante ha recibido cierta preparación matemática, referida al cálculo diferencial.

El problema es el siguiente:
Al comenzar una carrera, un corredor de de 68.2 kilogramos corre los primeros 7.04 m en 1.60 s, comenzando desde el reposo y acelerando uniformemente. (a) ¿Cuál es la velocidad (*debe decir rapidez*) del corredor al final de1.60 s? (b) ¿Cuál es la energía cinética del corredor? (c) ¿Qué potencia promedio genera el corredor durante el intervalo de 1.60 s? (Resnick et al, 1999)

La solución parcial que se mostró a los alumnos fue realizada de dos formas distintas:

Como mencioné, este problema debe revisarse con mucho cuidado, en el salón de clases, al utilizar estas herramientas. Ya que si los alumnos están comenzando a derivar funciones algebraicas su acercamiento a este problema será muy parecido al que vivieron o viven muchos estudiantes de tercer semestre, al revisar el concepto de velocidad instantánea con derivadas, situación que ya fue tratada en los dos primeros capítulos de esta investigación.

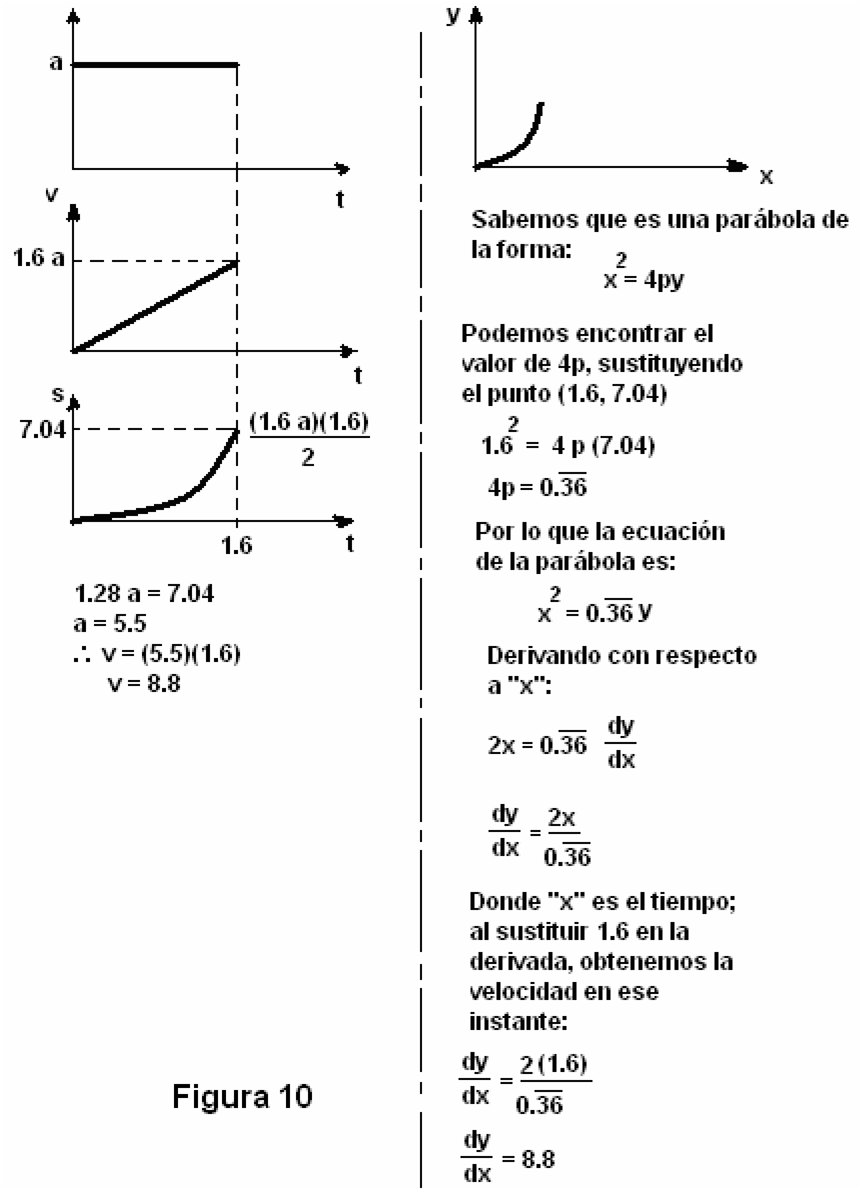


Figura 10

Como ya fue mencionado, en los capítulos anteriores, las necesidades de nuestra comunidad estudiantil y el saber como piensa ésta es necesario para proponer nuestros discursos escolares en la enseñanza que proponemos. Por otro lado, sabemos y tal como lo menciona Cantoral, que se enseñan matemáticas igual a como está el libro de texto; es decir, limitándose a reproducir el contenido en el pizarrón. En general, los libros que se utilizan en las clases provienen frecuentemente de sistemas escolares diferentes al nuestro, y en este sentido responden a fines múltiples. Esto provoca que la enseñanza se convierta en una exposición de contenido sin atractivo para los alumnos, donde los ejemplos y ejercicios propuestos no son significativos ni cercanos a su realidad, lo cual conduce al rechazo casi automático de la clase de matemáticas (Cantoral et al, 2003).

Quizá un primer paso para la superación de este problema sea el fomentar el uso de textos escritos para nuestro sistema educativo, de aquellos que rescatan nuestro acervo cultural, nuestros problemas, aquellos cuyo contenido y presentación incentiven la creatividad del docente y de los alumnos, donde se favorezca la enseñanza y aprendizaje por descubrimiento (Cantoral et al, 2003) .

En general, se enfrenta a los alumnos a situaciones problemáticas ficticias y sin relación con otras ciencias, lo que produce un desinterés profundo por los temas escolares. Resulta importante entonces, reflexionar sobre el tipo de problemas y actividades que les planteamos a los estudiantes: ¿cuáles de ellos están basados en situaciones donde aparezcan las estructuras matemáticas, para que el aprendizaje tenga sentido en el alumno y que haya una motivación para adquirirlo?; ¿qué actividades se proponen para que los conceptos adquieran significado entre los alumnos? (Cantoral et al, 2003).

Aunado y tratando de responder a las preguntas realizadas por Cantoral, una de las estrategias a seguir es tener objetivos en común entre las academias que forman, por ejemplo, la base de las materias básicas en los CECYTS del IPN: matemáticas, física, química, biología y computación. Necesitando, entonces el trabajo en equipo para la vinculación entre asignaturas en la enseñanza y el aprendizaje. Cuando se proponen, en matemáticas, problemas o ejercicios de física, el estudiante siente un acercamiento o familiaridad con lo que va a resolver; la matemática que está aprendiendo le es útil, obligadamente necesaria, y su atención se centra totalmente en los conocimientos que esta recibiendo. La vinculación entre ciencias es necesaria para atraer el interés y por ende la atención del estudiante en el aula de clases; obteniendo por parte de él una propuesta creativa.

Por otra parte, aunque el objetivo principal de esta investigación es revisar las respuestas de los estudiantes ante la vinculación entre ciencias, me es necesario insertar, en este momento, algunos comentarios de algunos de mis compañeros profesores; que al igual que yo, trabajan en ambas academias. Los comentarios son en relación a una serie de preguntas establecidas con anterioridad. La secuencia será presentada de la siguiente manera; yo seré el entrevistador (E) y ellos los profesores 1 y 2; (P1) y (P2):

E: *¿Les ha ayudado a mejorar sus clases el estar trabajando en ambas academias?*

P1: *Sí, demasiado, me he dado cuenta de las necesidades matemáticas que requieren los muchachos para cubrir eficientemente sus cursos de física.*

P2: *Sí, me ha ayudado más la física para impartir matemáticas, que la matemática para impartir física.*

E: ¿Qué piensan del trabajo entre academias?

P1*: Debe ser más estrecho, debemos estar conscientes de lo que hace nuestra área "vecina" para mejorar nuestra enseñanza.*

P2: *Debe haber mayor comunicación, más trabajo en equipo.*

E: *¿Se sienten cómodos trabajando en ambas áreas? ¿O es más trabajo?*

P1*: Sí me siento contento y tranquilo.*

P2*: Yo también, me siento a gusto trabajando en ambas áreas, me ha “abierto más los ojos”.*

E: *¿Qué opinan de los tres problemas que vieron hace un momento?*

P1*: Muy interesantes, inclusive ya estuve pensando en algunos de movimiento armónico donde incluiríamos gráficas de movimiento sobre un resorte, estudiando los puntos críticos de esta gráfica y generando con estos puntos una gráfica exponencial. La idea es muy cercana al problema que mostraste de la paracaidista.*

P2*: Yo no he hecho problemas como los que mostraste, pero creo que si es necesario “envolver” al estudiante en varios conceptos, aplicados al mismo tiempo, ya que atraeríamos más su atención.*

Como podemos apreciar en estos pocos y cortos comentarios, los profesores sienten que el trabajo de ofrecer, al estudiante, una alternativa más en nuestra enseñanza es necesario tanto para mejorar sus discursos escolares como para lograr una mayor atención de los alumnos. Cabe mencionar que estas pocas preguntas que se exponen aquí son una corta parte de lo que se analizará en una investigación posterior, enfocada al profesor y al conocimiento.

CAPÍTULO 5

Vinculación entre asignaturas como respuesta a las necesidades de nuestra comunidad estudiantil.

LA VINCULACIÓN ENTRE ASIGNATURAS UNA HERRAMIENTA PARA ESTABLECER OBJETIVOS COMUNES DE ENSEÑANZA ENTRE ELLAS.

Por lo presentado en los capítulos anteriores, podemos observar lo importante que es para el profesor, en su clase de matemáticas, el conocer el pensamiento de sus estudiantes; así como tener presente, dentro de la planeación de su enseñanza, los cambios que se manifiestan en todos los ámbitos de nuestra sociedad, con la intención de relacionarlos, adecuarlos, incluirlos o vincularlos a su propuesta en clase; ya que la relación enseñanza-aprendizaje no está excluida de dichos cambios. También, para un profesor es necesario que los problemas, ejercicios y/o actividades escolares planteados por él mismo en el aula de clases tengan una razón de ser para él y buscar que sean también para el alumno; respondiendo así a una necesidad especifica de su comunidad académica, estudiantil o social. Se busca, entonces, que la relación enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, en este caso, tengan y mantengan un objetivo tanto particular como general; es decir, cuando se planteen ejercicios, problemas o actividades matemáticas a los estudiantes es necesario y valido hacernos preguntas como las siguientes: ¿qué es lo que pretendemos con la enseñanza de esos problemas, ejercicios o actividades matemáticas?, ¿cuál es la intención de proponer dichos ejercicios?, ¿en qué le ayudarán a los estudiantes en su conocimiento matemático y de otras ciencias, la propuesta de ciertos ejercicios, problemas o tareas matemáticas?, ¿realmente buscamos, como profesores, objetivos de enseñanza al proponer dichas actividades matemáticas, en el aula de clases?, ¿los objetivos que planteamos como profesores serán similares a los planteados por la institución y a los esperados por los estudiantes?, etc.

Reafirmando la necesidad de crear vínculos entre asignaturas para la enseñanza de las matemáticas, observemos otras vivencias de clase donde se observan las manifestaciones del cómo responde el estudiante al vincular sus conocimientos.

En esta ilustración se muestra lo que físicamente se realiza en el aula de clase, en la asignatura de física 1, después de haber revisado los conceptos del MRU y MRUA; también se ha propuesto a un grupo de alumnos de cuarto semestre, en la asignatura de cálculo diferencial para revisar el tema de interpretación geométrica de la derivada. La persona 1 se mueve hacia la derecha y la persona 2 se mueve hacia la izquierda.

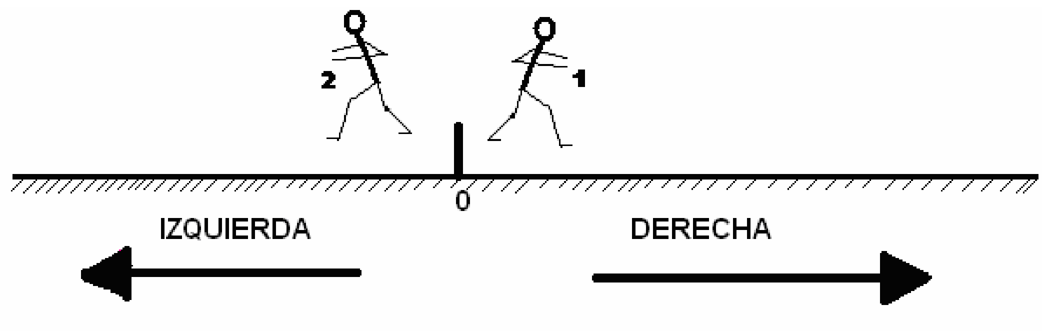


Figura 11

Posteriormente, se les muestran a los alumnos las siguientes gráficas

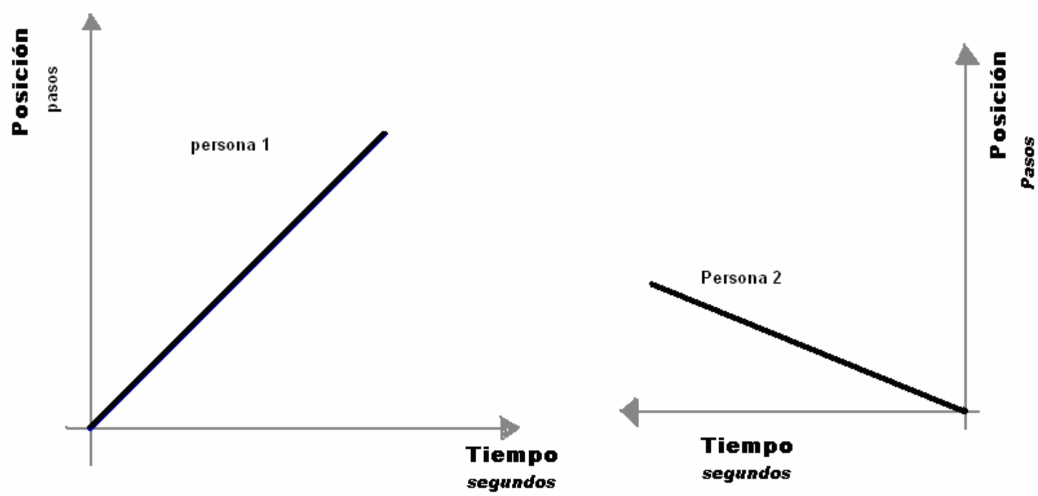


Figura 12

Después de mostrar las gráficas a los estudiantes se les pide que den sus comentarios de acuerdo a lo observado físicamente y a lo planteado en las gráficas. Los comentarios resumidos de los alumnos, tanto de física I como de cálculo diferencial son:

- *La gráfica de la izquierda muestra como la persona 1 se mueve hacia la derecha y la gráfica de la izquierda nos muestra como la persona 2 se mueve hacia la izquierda.*
- *Bueno, puede ser que las gráficas muestren eso, pero no hay tiempos negativos.*
- *Sí, yo pondría los ejes al revés (la posición en el eje "x" y el tiempo en el eje "y").*
- *Sí, pero si ponemos los ejes al revés entonces la pendiente de la recta ya no sería la diferencia de ordenadas entre la diferencia de abscisas, sino al revés; la diferencia de abscisas entre la diferencia de ordenadas. ¿Maestro se puede hacer eso?*

Observamos en las preguntas de los estudiantes que los conceptos que ellos tienen han sido puestos en conflicto; tal como lo mencionaba un alumno de sexto semestre en los capítulos anteriores: - *es necesario que reforcemos nuestros conceptos relacionando las ciencias y poder tener una visión más amplia de estos*-. Entonces, la falta de reforzar conceptos así como la poca vinculación que se ha generado entre ciencias, en los espacios escolares, es una de las causas que ha dificultado, en el alumno, la propuesta de mayores expectativas de solución hacia un problema, situación, fenómeno, etcétera.

Continuando con la secuencia de desplazamientos de las personas 1 y 2, observaremos lo que proponen los estudiantes en sus análisis de movimiento:

Primero, visualizan lo siguiente:

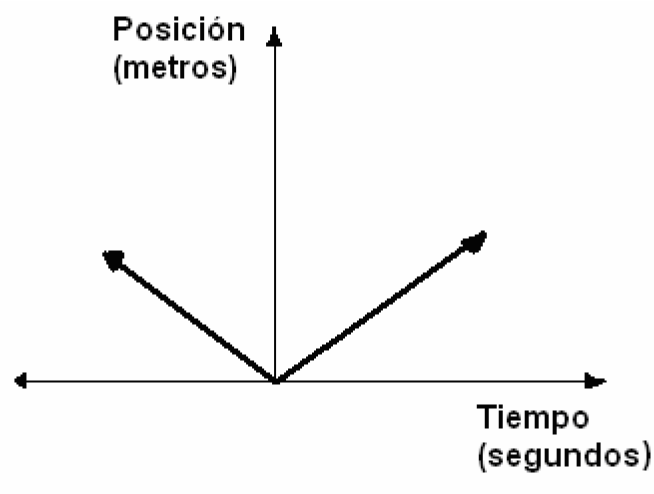


Figura 13

Después, los alumnos de cuarto semestre, en la asignatura de cálculo diferencial, tratando de corregir, confrontan sus aprendizajes de física I, geometría analítica y cálculo diferencial, haciendo la siguiente propuesta:

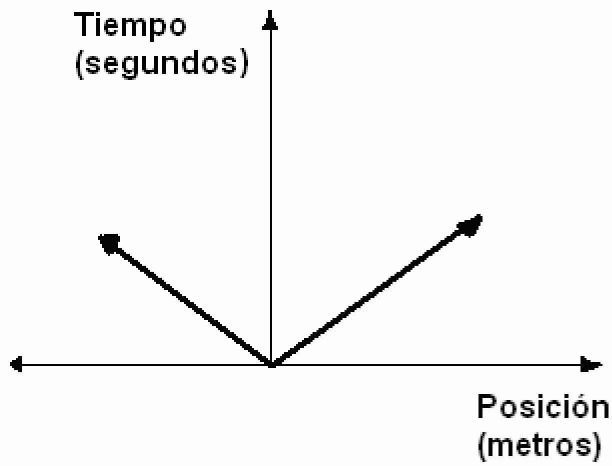


Figura 14

Como podemos observar, es de suma importancia tener presente, siempre, la consideración del alumno, el profesor y el conocimiento dentro de los escenarios escolares. Entonces se hace necesaria la ayuda del profesor para que el estudiante pueda "brincar" los obstáculos que ha encontrado en la adquisición del nuevo conocimiento y de su aprendizaje.

Para los alumnos de tercer semestre, en la asignatura de física I, se les muestra la gráfica anterior para saber que piensan sobre la nueva propuesta. Muchos de ellos aceptan la nueva propuesta; entonces el profesor interviene con los alumnos para preguntarles si la rapidez se define como la relación entre el tiempo y la distancia. Los alumnos hacen un silencio total y después de analizar la pregunta, algunos de ellos comentan:

- *No esa no es la definición pero tal vez para este caso sí se acepte la gráfica así como está puesta.*
- *No yo pienso que hay más que investigar.*

- *Tal vez, hay más cosas que nos quiera mostrar el maestro… ¿verdad?*

Profesor:

Recuerden que deben revisar sus conceptos de pendiente de una recta, los revisaron en geometría analítica, hace unos meses. ¿Cuál es la definición de pendiente de una línea?

Alumnos:

- *Diferencia de ordenadas entre diferencia de abscisas.*

Profesor:

- *Bien. Ahora, ¿cuál es la definición de rapidez?*

Alumnos:

- *Es la pendiente de la recta tangente a la curva generada por la función del cambio de posición entre el tiempo transcurrido para dicho cambio.*

Profesor:

- *Muy bien. Ya que han leído sus conceptos, hagan un resumen y piensen nuevamente en lo que está pasando.*

Alumnos:

- *La gráfica está al revés.*
- *Los ejes están mal.*

Así, y continuando con la relación de los tres actores en el proceso de enseñanza-aprendizaje, observemos algunas de las intervenciones que realiza el profesor, tanto con los alumnos de tercero y cuarto semestres, en referencia al análisis de movimiento de las dos personas:

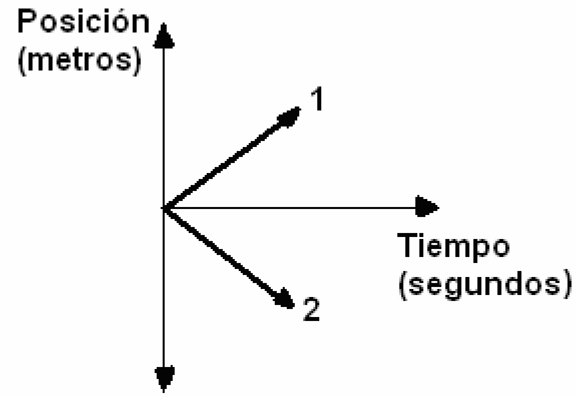


Figura 15

Sobre la gráfica que propone el profesor es necesario que él realice las siguientes observaciones:

- *Observen que la gráfica muestra el sentido de desplazamiento (sentidos contrarios) de cada individuo.*
- *Que una gráfica tenga dirección ascendente y otra descendente, no quiere decir que, precisamente, uno de ellos se mueva hacia arriba y el otro hacia abajo, aunque puede darse el caso para otro ejemplo.*

- *Observamos que la pendiente de una recta es negativa y la otra positiva. Esto quiere decir que de acuerdo a un sistema referencial y a un convencionalismo matemático nosotros estamos proponiendo que "el movimiento" de persona 1 sea positivo, movimiento hacia la derecha, y el movimiento de la persona 2, movimiento hacia la izquierda, sea negativo.*

Alumnos:

- *Además, observamos que no hay tiempos negativos.*

Es importante que el estudiante confronte sus nuevos conocimientos con situaciones particulares y no de fácil e inmediata respuesta. Por consiguiente y continuando con la secuencia de clase, veamos más gráficas y algunas de las respuestas que ofrecen los estudiantes:

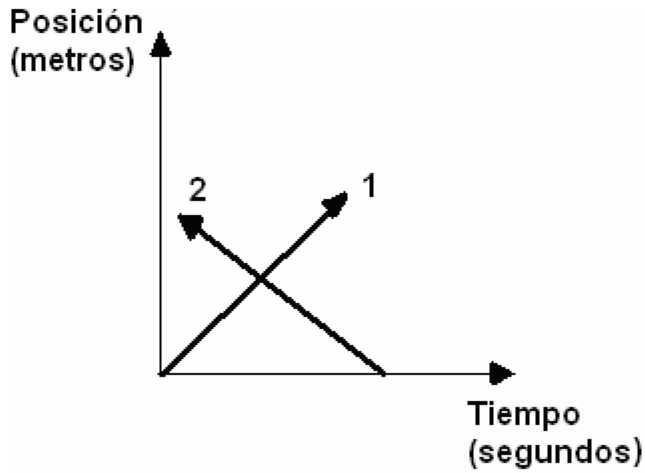


Figura 16

Profesor:

- *¿Qué me dicen de la gráfica anterior?*

La respuesta generalizada e inmediata que ofrecen los estudiantes es:

- *La gráfica muestra el punto donde se intersecan las dos personas*.

Profesor:

- *¿se encontrarán en algún punto de su trayecto?*
- *Revisen las pendientes de las rectas.*
- *¿Será real lo de la persona 2?*

Posteriormente, con más detenimiento y tiempo de observación, el estudiante comienza a discutir sobre la gráfica, ofreciendo las siguientes respuestas.

Alumnos:

- *Tal vez no se trata del ejemplo que hemos estado analizando.*
- *Yo creo que hay que modificar la gráfica como en el ejemplo anterior.*

Profesor:

Analicen bien la gráfica, recuerden que es un problema para discutirlo, ¿qué relación le encuentran con el problema anterior?

Alumnos:

- *Yo pienso que lo que quiere decir la gráfica es que la persona 2 se tarda más tiempo recorrer la misma distancia que la persona 1.*
- *No… no tiene nada que ver con el problema anterior.*
- *Sí, es otro ejemplo diferente, la persona 1 parte en un tiempo cero y la persona parte en otro tiempo diferente.*
- *Sí, no es el mismo tiempo de "arranque".*
- *Sí, no parten al mismo tiempo y se dirigen sobre la misma línea horizontal, pero en sentidos diferentes.*
- *Sí… son sentidos diferentes porque las pendientes de las rectas son diferentes.*
- *Sí, pero las ordenadas son positivas y lo que cambia es el signo de los tiempos.*
- *Pero también pueden ser diferentes los sentidos de las personas y no tener intersección.*
- *Sí… como en el ejemplo anterior.*
- *Sí, pero partieron al mismo tiempo.*

- *Creo que ya entendí… si tienen sentidos diferentes las personas las pendientes de las rectas son contrarias* (una negativa y otra positiva).
- *No, yo estoy de acuerdo con el compañero, la diferencia de las ordenadas es positiva y la diferencia de tiempos es positiva en la persona 1, y negativa en la de la persona 2.*
- *Tienes razón… por lo que hemos visto no puede regresar la persona 2 en el tiempo.*
- *Es cierto, es una gráfica como la que habíamos propuesto al inicio de la clase.*
- *Ahora sí entendí… tiempos negativos no.*

Ahora, el profesor les muestra otra gráfica muy particular.

Profesor:

- *Observemos otra gráfica, que me pueden decir al respecto.*
- *¿Qué está pasando con la persona?*

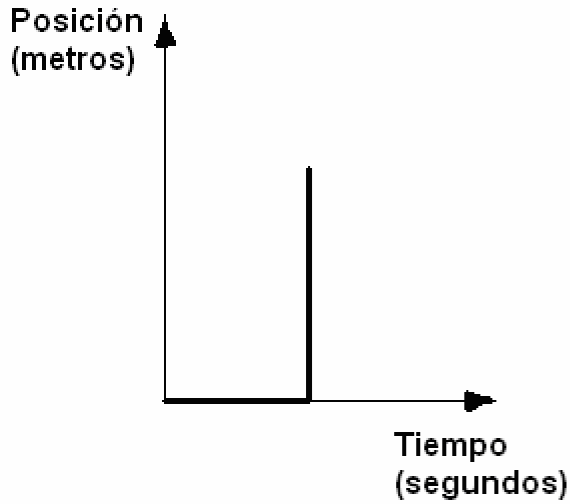


Figura 17

Respuestas ofrecidas por los estudiantes:

- *La persona estaba sentada y después se paro.*
- *Risas: ja, ja, ja, ja.*
- *La persona no se movía y después voló.*
- *Más risas: ja, ja, ja, ja.*
- *La persona estaba en la misma posición durante un determinado tiempo y después en un instante cambio de posición.*
- *¿Profesor, aquí podemos involucrar el concepto del diferencial?*
- *¿Profesor, aquí podemos dar alguna interpretación de la tangente de 90°?*
- *¿Qué pasa en la recta vertical, no la puedo relacionar?*
- *Profesor, ¿si se aplica la definición de movimiento en esta gráfica? Usted mencionó que para que exista movimiento debe haber un sistema de referencia, un cambio de posición y un transcurso de tiempo.*

Esta última respuesta es una de las que me ha dejado mayor satisfacción, el alumno ha llevado sus conceptos literales a un ambiente visual.

De acuerdo a los comentarios de los estudiantes y las gráficas vistas anteriormente, reitero que el estudiante necesita un vínculo para relacionar su entorno natural con su razonamiento, y creo que uno de esos vínculos es el análisis gráfico. Como podemos apreciar, entonces, los escenarios propuestos por el profesor deben dar hincapié a la relación de conocimientos adquiridos por el estudiante, en las diferentes asignaturas que se ofrecen a éste en su formación académica. Reitero que el personaje que estamos observando en esta investigación es el estudiante.

El alumno analizó 4 ó 5 ejemplos de forma gráfica para poder vincular sus conocimientos sobre un tema en específico y tener mayor facilidad de interpretar los estudios propuestos en forma gráfica. Además, podemos observar en el alumno, como el interés en los temas revisados en clase, va creciendo. El alumno necesita “palpar” su conocimiento; es decir, si además el estudiante puede visualizar situaciones más cercanas a su realidad será más amplio su campo de respuesta. Por ejemplo, veamos el siguiente problema donde se pide al alumno de cuarto semestre, en la asignatura de física II, el análisis de una gráfica. Aunado a este análisis se le ha propuesto al alumno su interpretación contextualizada en una actividad cotidiana. El problema dice así:

Un bloque de 5.0 kg. se mueve en línea recta sobre una superficie horizontal sin fricción bajo la influencia de una fuerza que varía con la posición, como se muestra en la figura. ¿Cuánto trabajo efectúa la fuerza cuando el bloque se mueve desde el origen hasta x = 8.0 m? (Resnick et al, 2003).

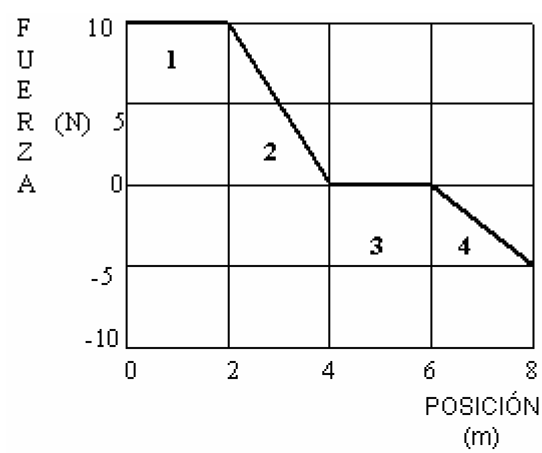


Figura 18

Después de que el alumno realiza el análisis algebraico, el profesor muestra la siguiente figura a los alumnos con la intención de que ellos expongan sus comentarios de la gráfica y el “dibujo”.

Interpretación de la gráfica que se les propone a los alumnos.

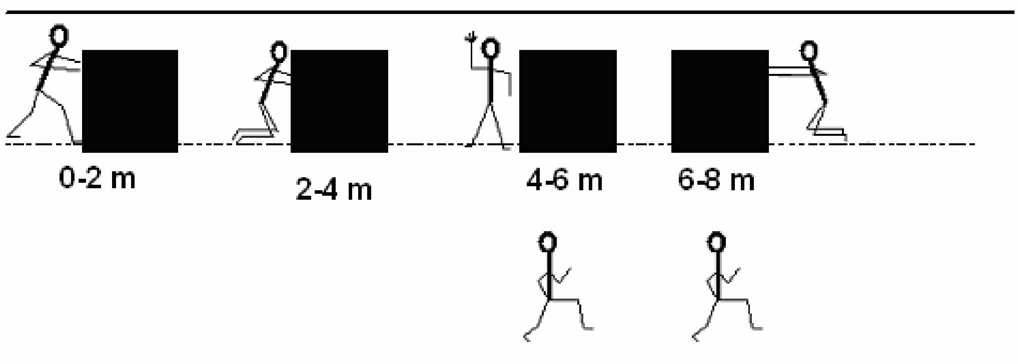


Figura 19

Las explicaciones que se puedan ofrecer al estudiante, de acuerdo a lo anterior, pueden ser variadas pero todas tendrían la misma línea a seguir. Una de esas posibles respuestas sería:

Profesor:

- *Observemos que de 0 a 2 m la persona empuja con la misma fuerza.*
- *De 2 a 4 m la persona ya está cansada y empuja cada vez con menos fuerza.*
- *De 4 a 6 m la persona dejo de empujar, pero el bloque se sigue moviendo por efecto de la aceleración que se le ha dado.*
- *La persona se da cuenta a partir de los 5 m, aproximadamente (es para tener una referencia), que el bloque está a punto de llegar a*

los 8 m, y corre para empezar a detener el bloque a partir de los 6 m; el bloque se sigue moviendo en sentido izquierda-derecha pero la fuerza de la persona esta en sentido contrario al movimiento.

Alumnos:

- *Risas: ja, ja, ja.*
- *Se entiende la gráfica con el dibujo, aunque podríamos calcular la aceleración que lleva el bloque en 4m para saber si la persona puede alcanzarlo en 6 m cuando está comienza a correr en 5 m.*
- *Así como la propuesta que usted hace podríamos proponer otra; por ejemplo que el bloque es jalado.*
- *Ahora entiendo lo que es una disminución de fuerza y lo que es una fuerza negativa.*

En la secuencia anterior, observamos nuevamente, que la intención del profesor es contextualizar en alguna actividad vivida o vista por el estudiante la problemática que se plantea en la gráfica. En la secuencia anterior encontramos la relación del alumno, profesor y saber encaminada hacia el mismo objetivo: revisión gráfica de un problema para expresar su comportamiento en forma algebraica y contextual. El alumno ha observado y revisado un problema de tres formas distintas; propuesto primeramente en forma gráfica, después en forma contextualizada y posteriormente en forma algorítmica, aplicando sus procedimientos algebraicos.

Otro ejemplo que podemos reconsiderar para la formulación de tareas matemáticas que involucren la vinculación entre asignaturas para construir objetivos comunes es lo siguiente:

En la asignatura de álgebra se revisan las leyes de los exponentes para la multiplicación, división, etc., así como también se realizan múltiples y variados ejemplos y ejercicios algebraicos sobre estas leyes. Por ejemplo:

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$x^2 \cdot x^5 = x^{5+2} = x^7$$

Además, se revisa el tema de resolución de sistemas de ecuaciones lineales, realizando, también, múltiples y variados ejemplos y ejercicios algebraicos.

Pero en física, el alumno no puede vincular dichos conocimientos con problemas enmarcados en diferentes contextos. Por ejemplo, al alumno se le pide, en la asignatura de física I, que realice el siguiente ejercicio: La expresión $A = B^m C^n$ representa un fenómeno físico, donde las dimensiones de A son L y T (longitud y tiempo) las dimensiones de B son $L^2 T^{-1}$ y las dimensiones de C son $L T^2$. Determinar el valor de los coeficientes n y m.

Este problema es uno de los últimos ejercicios que se proponen al alumno en el tema de ecuaciones dimensiónales (anteriormente ya realizó, por lo menos, 8 ejemplos), como parte de la primera unidad de física I, mediciones.

Debo aclarar que dicho problema es resuelto por uno o dos alumnos como máximo, de un total de 45 alumnos, en promedio. Es necesario que mencione, que la mayoría de los alumnos comienza a proponer la solución de su problema con ecuaciones logarítmicas; tal vez por que ha sido de los últimos temas que ha revisado en matemáticas, en su segundo semestre. La asignatura de álgebra es estudiada en el primer semestre.

La resolución del problema que se propone al estudiante es la siguiente:

$A = B\ C$

$L\,T = (L^{2}\,T^{-1})^{m}\,(L\ T^{2})^{n}$

$L\,T = (L^{2m}\,T^{-m})\,(L^{n}\,T^{2n})$

Observamos que existen bases iguales con exponenetes diferentes, por lo que:

$L^{1}\ T^{1} = (L^{2m}\ \ T^{-m})\ (L^{n}\ \ T^{2n})$

tenemos entonces que:

$1 = 2m + n$
$1 = -m + 2n$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, tenemos que:

$m = 1/5$
$n = 3/5$

Con lo anterior, se reitera el compromiso que tenemos como profesores de matemáticas y física de trabajar más en conjunto. Nuestro interés debe ser, siempre, el crecimiento intelectual y humano del estudiante.

LAS ASIGNATURAS Y SU RELACIÓN CON MÉTODOS GRÁFICOS, REQUERIMIENTOS DE LOS ESTUDIANTES DE LOS CECYTS.

De acuerdo a lo anterior, notamos que es necesaria una construcción de vinculación entre asignaturas para la enseñanza de la matemática y la física; en este caso una herramienta para dicha vinculación es el análisis gráfico de las tareas matemáticas y físicas.

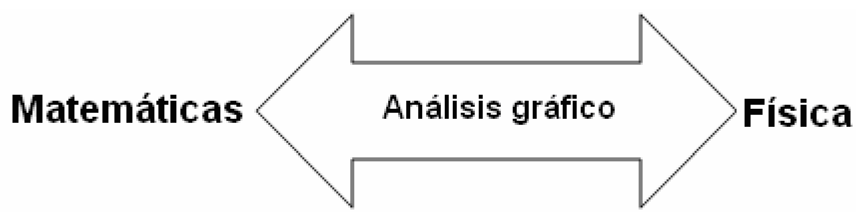


Figura 20

Como hemos observado en los "acercamientos" hechos con lo estudiantes, tanto en la asignatura de matemáticas como en la asignatura de física, denotamos una síntesis de conocimientos; síntesis que ha llevado al estudiante a no cuartar y separar conocimientos, generando una retroalimentación del conocimiento en forma "cíclica".[22]

[22] Cuando hablamos de un conocimiento cíclico nos referimos a que el estudiante revisa constantemente sus conceptos aprendidos en física y matemáticas para generar nuevos conocimientos, es decir el estudiante observa que lo anterior le será útil para lo ulterior. Es importante denotar que dentro de estos cambios de globalización que está sufriendo nuestra sociedad consideremos la valoración y la necesidad que debe crearse en el estudiante para poder aceptar la creación del conocimiento. Ya que como es sabido por propios y extraños, las sociedades que triunfarán en un futuro muy próximo son aquellas que generen conocimiento; lo cual fue reiterado por nuestro director general; el doctor José Enrique Villa Rivera.

Por otra parte, hemos hablado de que los tiempos de enseñanza son muy ambiciosos con respecto a los tiempos de aprendizaje, entonces es importante no perder de vista que el objetivo de este trabajo de investigación es explorar la forma de vincular la física y la matemática respetando los tiempos “normales de enseñanza”, (un semestre para el curso de cálculo diferencial: “90 horas de curso”) para que haga propio el concepto de derivada y que el cálculo diferencial deje de ser, solamente, el saber derivar, principalmente.

Regresando a nuestro objetivo particular, revisaremos, ahora una parte de lo escrito por Crisólogo Dolores. Según estudios realizados por Dolores *et al*, (2002) nos dicen que el estudio del movimiento de los cuerpos se observa, en nuestra educación mexicana, desde el cuarto año de primaria, y se le da un seguimiento en el segundo grado de la escuela secundaria en la asignatura de física I, en particular se estudia el movimiento rectilíneo uniforme, caracterizándolo mediante gráficas que incluyen al cambio de posición con respecto al tiempo, teniendo una relación de la velocidad con la inclinación de la recta que lo representa. Prácticamente, todos los bachilleratos de nuestro país enfocados a la ingeniería o ciencias naturales incluyen un curso de Física en sus programas de estudio, y en este curso de física incluyen a la cinemática como parte de su temario. Como se puede observar, tanto por parte de la asignatura de física como por la asignatura de matemáticas existe un interés particular en los programas de estudio, para revisar y analizar los conceptos de movimiento. Lo anterior, presupone el establecimiento de relación entre las asignaturas de física y matemáticas; relación debidamente establecida tanto en estudiantes como en profesores, la pregunta es ¿realmente existe, en la mente del estudiante, esta relación? A la anterior pregunta (hecha por Crisólogo Dolores) yo añadiría una segunda pregunta; ¿los profesores están enterados de que debe manifestarse esta relación en el estudiante? La respuesta que daríamos cada uno de nosotros como profesores, muy seguramente, sería común.

Por lo anterior, robusteceré la necesidad de la vinculación entre las enseñanzas de la física y la matemática en el nivel medio superior, claro está que está vinculación incluirá el análisis gráfico. Lo anterior lo expreso con las siguientes gráficas:

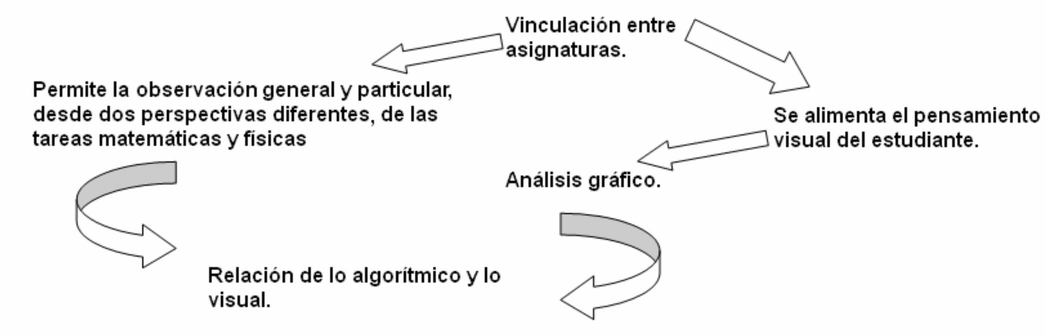


Figura 21

CAPÍTULO 6

En camino hacia el concepto de la derivada utilizando la vinculación entre asignaturas.

Para comenzar este capítulo mencionaré, en primera instancia que, las actividades para este trabajo de investigación fueron seleccionados del libro Serway Jewet, física I. México, 2003, principalmente.[23] Algunos de estos ejercicios han sido modificados por necesidades propias de los programas de estudio del IPN; otros tantos han sido propuestos por el profesor, de acuerdo a las necesidades de los alumnos y requerimientos de la propia vinculación entre asignaturas.

Estos ejercicios son propuestos al alumno, durante el tercer parcial de física I, en el tercer semestre. El alumno antes de iniciar con estos ejercicios, que se revisan durante el tema de movimiento, ya ha revisado los temas de estática y vectores, en la asignatura de física. En la asignatura de geometría analítica ha revisado los temas de plano cartesiano, lugares y ecuaciones geométricos, recta, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola. Ahora, cuando el estudiante está revisando el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, en la asignatura de física; a la vez está revisando, en la asignatura de geometría analítica, el tema de ecuación general de segundo grado, teniendo pendiente por revisar los temas de ecuaciones paramétricas y coordenadas polares.

Cabe mencionar que el estudiante, se ha ido incursionando lentamente en la vinculación entre asignaturas para la enseñanza tanto de la física como de las matemáticas, a partir del tercer semestre.

23 El libro Serway Jewet, Física I. Texto basado en cálculo. Tercera edición en español, 2003. Contiene una serie de ejercicios, en su capítulo II, referidos al movimiento usando la herramienta del cálculo. Esos ejercicios han sido adecuados, en tiempos escolares, tanto en las asignaturas de matemáticas como de física para ser presentados a los alumnos del C. E. C. y T. “Juan de Dios Bátiz Paredes”, en momentos distintos de su enseñanza escolar; tercero y cuarto semestres.

El estudiante está recibiendo por primera vez la matemática en un contexto físico y la física en un contexto matemático. Ahora, durante el proceso de vinculación que va recibiendo el alumno, y donde el profesor hace hincapié, en el estudiante, para que éste tenga presente los temas afines que está estudiando en las asignaturas de matemáticas y la física, ha dado como respuesta, en el estudiante, que él realmente esté convencido de que sus enseñanzas y aprendizajes no están aislados. Muchos estudiantes mencionan en el salón de clases: -los temas que estamos estudiando en física y matemáticas tienen mucha afinidad-.

A continuación se expone el primer ejercicio, propuesto a los alumnos por el profesor, en la asignatura de física I para dar antesala al cálculo; el ejercicio va acompañado de los comentarios y respuestas de los alumnos.

Una partícula se mueve a lo largo de su eje x y su posición varía con el tiempo de acuerdo con la expresión $x = -4\ t + 2\ t^2$, donde "x" está en metros y "t" en segundos. Hacer la gráfica de dicha función y determinar el desplazamiento de la partícula en los siguientes intervalos de tiempo:

a) de t = 0 a t = 1, segundos
b) de t =1 a t = 3, segundos

c) Calcular, también, la rapidez promedio durante estos dos intervalos de tiempo.
d) Finalmente, determinar la rapidez instantánea de la partícula en t = 2. 5 segundos.

Para la resolución del problema se propone al estudiante que inicie con la construcción de la gráfica posición vs. tiempo. Las respuestas de los alumnos que se muestran a continuación, son en resumen, lo que se escucha, normalmente, en el salón de clases.

El profesor menciona al alumno que la gráfica la pueden realizar utilizando las herramientas matemáticas que han revisado en geometría analítica. La asignatura de geometría analítica la están cursando a la par que física I, en el tercer semestre.

Profesor:

¿Qué tipo de curva nos representa la ecuación que plantea el problema?, recuerden que gran parte del tiempo dedicado, en geometría analítica, fue hacia el estudio de ecuaciones de segundo grado. Observen, tenemos una variable cuadrática y otra lineal.

Alumnos:

- *Ah, sí es una parábola.*
- *Sí, es una parábola pero la "x" se ha convertido en "t" y la "y" en "x".*
- *No entiendo, ¿cómo que la "y" se convirtió en "x"?*
- *¿Se invierten los ejes?*

Profesor:

No se invierten los ejes, recuerden que como la partícula se desplaza por el eje "x", entonces las posiciones deben estar referidas al eje "x". Ahora, en vez de "x" pudimos haber usado la letra "p" de posición, o la misma letra "y", o la primer letra de su nombre o apellido, lo interesante es que ustedes se den cuenta que debemos identificar o simbolizar a la posición, y en este caso, el autor la ha simbolizado con la letra "x", por que la partícula se mueve sobre el eje "x". Son cambios de posición sobre el eje "x".

Alumnos:

- *Ya entendí, puedo poner la letra “z” si la partícula se desplaza por el eje “z”.*
- *También la letra “y” si la partícula se mueve en el eje “y”.*
- *Sí, como ha dicho usted profesor la matemática la estamos vinculando a la física.*
- *Sí, es otro contexto pero es el mismo fundamento teórico.*
- *Sí, como usted nos ha mencionado por algo estamos estudiando temas comunes en las diferentes asignaturas.*

Profesor:

Muy bien. Ahora, si ya vinculamos la parábola “vista” en analítica con la parábola de este problema, podemos comenzar a trazarla sin ninguna dificultad.

La propuesta gráfica que se revisa en el salón de clases es la siguiente:

t	x
0	0
1	-2
2	0
3	6
4	16

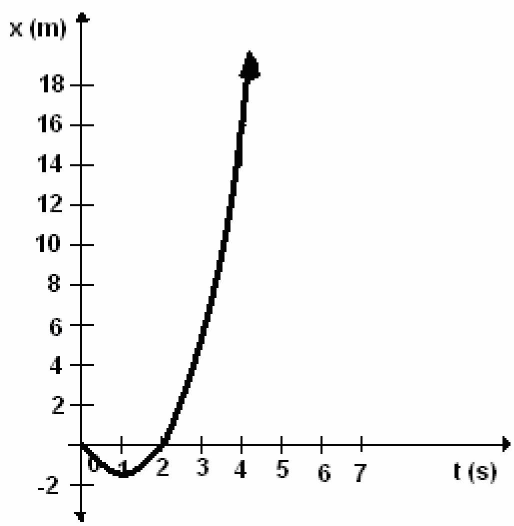


Figura 22

El alumno, de acuerdo a sus conocimientos anteriores de física, ya tiene establecido que dentro del contexto de movimiento no se grafican tiempos negativos.

Con la teoría que tienen los alumnos comienzan a realizar sus primeros cálculos para contestar las primeras preguntas. Normalmente, en los tres primeros incisos el alumno no tiene ninguna dificultad. Los resultados que muestran los alumnos son los siguientes:

Respuestas de los alumnos:

Función del problema: $x = -4t + 2t^2$

a) desplazamiento de la partícula de $t = 0$ a $t = 1$, segundos

para $t = 0$; $x = 0$

para $t = 1$; $x = -2$

por lo tanto: $\Delta t = 1 - 0 = 1$ s.

$\Delta s = -2 - 0 = -2$ m.

Cabe mencionar que en la respuesta del inciso "*a*" varios de los alumnos anotan el resultado sin entender que es lo que está pasando con el resultado negativo de -2. Aún, no logran asimilar que significa tener un resultado negativo en un desplazamiento. Lo anterior es sabido por el profesor cuando pregunta a los alumnos, en forma individual:

Profesor:

¿Qué quiere decir que el resultado sea -2?

Alumnos:

- *No se.*

La respuesta anterior, es muy constante entre los alumnos.

- *Cambia a menos dos.*

- *Se mueve hacia menos dos.*

El profesor interrumpe.

Profesor:

Observen las literales y relaciónenlas con sus conocimientos teóricos. La "x" nos indica posición, y un cambio de posición nos indica…

Alumnos:

Desplazamiento.

- *Se ha desplazado menos dos unidades.*
- *No entiendo.*
- *Sí, estaba en cero y se regresa, ¿no profesor?*

Profesor:

Bueno, imaginen que la partícula son ustedes y están en su casa. La casa es el origen de su movimiento. Si ustedes se mueven, por ejemplo, hacia la escuela es un desplazamiento positivo y si se mueven en sentido contrario es un desplazamiento negativo.

Alumnos:

- *Creo que ya entendí; si usted está parado ahí y se mueve hacia delante es un desplazamiento positivo y si se mueve hacia atrás es un desplazamiento negativo.*
- *Ah, entonces la partícula estaba en su casa y se regreso.*
- *Sí, creo que así funciona. Me muevo hacia un lado es un signo de desplazamiento, me muevo hacia el otro lado es un signo contrario.*
- *Por eso el desplazamiento es un vector.*
- *Ya entendí.*

A pesar de que los alumnos ya han revisado, en sesiones anteriores, la teoría sobre movimiento, les es difícil asimilar el conocimiento. No obstante, encontramos cierta "movilidad" de escenarios, en la sesión donde se revisa este problema, que permite al estudiante repensar sobre la información que ha recibido. Por otra parte, dicha movilidad permite tanto al profesor como al estudiante mantener una constante descontextualización y recontextualización de temas propuestos en la currícula escolar.

Se continúan revisando las respuestas de los alumnos, ahora para el inciso "b".

b) desplazamiento de la partícula de t =1 a t = 3, segundos:

$$\text{para } t=1;\ x=-2$$

$$\text{para } t=3;\ x=6$$

$$\text{por lo tanto: } \Delta t = 3\text{-}1 = 2 \text{ s.}$$

$$\Delta s = 6 - (-2) = 8\ m.$$

Alumnos:

- *Estaba en -2 m y después en 6 m, eso hace 8 m.*
- *Sí, estaba en la posición de -2 m cuando había transcurrido 1 segundo y después estaba en la posición de 6 m cuando habían transcurrido 3 segundos.*
- *Sí, su desplazamiento fue de 8 m hacia la derecha…por así decirlo, ¿no profesor?*

Profesor:

Bien, han recordado y manipulado sus conocimientos de vectores (tema visto en el primer parcial de física I) y segmentos dirigidos (tema visto en el primer parcial de geometría analítica) adecuadamente. Felicidades.

Continuando con las respuestas; ahora veamos el inciso "c".

Observemos como el autor del libro sí hace diferencia entre lo que es rapidez y velocidad, al mencionar en el inciso “c”.
c) Calcular, también, la rapidez promedio durante estos dos intervalos de tiempo.

Las respuestas que ofrecen los alumnos son:

Rapidez media del inciso "a":

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$v = \frac{-2}{1}$$

$$v = -2 \text{ m/s}$$

Rapidez media del inciso "b":

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$v = \frac{8}{2}$$

$$v = 4 \text{ m/s}$$

$$v = \frac{4 - 2}{2}$$

$$v = 2 \text{ m/s}$$

Rapidez promedio desde el inicio hasta los tres segundos:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$v = \frac{6 - 0}{3 - 0}$$

$$v = 2 \text{ m/s}$$

Para las respuestas de este inciso, el estudiante ya tiene mayor confianza de mostrar públicamente sus resultados. Es tiempo de enfrentarlos a una “nueva” situación que los haga reflexionar sobre los límites de aplicación de sus nuevos conocimientos e incrementar su posibilidad de respuesta.

Continuamos entonces con la parte final del problema; el inciso “d”.

d) Finalmente, determinar la rapidez instantánea de la partícula en t = 2. 5 segundos.

Lo primero que realiza el estudiante es una sustitución de valores en la formula:

Alumnos:

La respuesta es fácil:

Sustituimos t = 2.5 s, en la ecuación:

$$x = -4\,(2.5) + 2\,(2.5)^2$$

$$x = 2.5 \text{ m}$$

$$v = \frac{2.5}{2.5}$$

$$v = 1 \text{ m/s}$$

Profesor:

¿Es esa la definición de rapidez instantánea, una sustitución de valores? Recuerden que la rapidez instantánea es aquella donde la rapidez media tiene un denominador delta "t" tendiente a cero.

El profesor escribe en el pizarrón: $\Delta t \rightarrow 0$.

Profesor:

Es decir, debemos hacer intervalos de tiempo cada vez más pequeños, por ejemplo intenten con un $t_1 = 2.5$ y un $t_2 = 2.6$; esto significa un $\Delta t = 0.1$. Para un segundo cálculo, consideren el mismo $t_1 = 2.5$ y un $t_2 = 2.55$; es decir, más cercano a t_1; así $\Delta t = 0.05$. Como pueden observar Δt se acerca a cero pero NO es cero. El intervalo de tiempo debe ser, cada vez, más pequeño.

Los alumnos comienzan a realizar los cálculos pasando al pizarrón. Los resultados que van obteniendo son:

Alumnos:

Primer cálculo:

Para $t_1 = 2.5$ *s.*

$X_1 = -4\ (2.5) + 2\ (2.5)^2;\ X_1 = 2.5\ m$

Para $t_2 = 2.6$ *s*

$X_2 = -4\ (2.6) + 2\ (2.6)^2;\ X_1 = 3.12\ m$

$V= (3.12 – 2.5)/(2.6 – 2.5)$

$V = 6.2\ m/s$

Segundo cálculo:

Para $t_1 = 2.5$ *s.*

$X_1 = -4\ (2.5) + 2\ (2.5)^2;\ X_1 = 2.5\ m$

Para $t_2 = 2.55$ *s*

$X_2 = -4\ (2.55) + 2\ (2.55)^2;\ X_1 = 2.805\ m$

$V= (2.805 – 2.5)/(2.6 – 2.55)$

$V = 6.1\ m/s$

Alumnos:

- *Profesor, ¿es necesario dar más tiempos?*
- *No entiendo para que más datos… ¿qué estamos haciendo?*
- *¿Así se calcula una rapidez instantánea?*
- *Podemos considerar a* t_2 *más chico que* t_1.

Profesor:

Sí pueden.

Observen su definición de rapidez instantánea.

Los alumnos observan su definición, tratando de vincular su ejercicio con su definición. El profesor interviene nuevamente.

Profesor:

¿Qué es una velocidad instantánea y una rapidez instantánea, de acuerdo a lo que tienen escrito en sus apuntes?

¿Pueden leerlo en voz alta, por favor?

Alumnos:

- *La velocidad instantánea es igual al valor límite de la relación o cociente que existe entre Δx y Δt, cuando Δt tiende a cero.*
- *Sí… aquí lo escribimos matemáticamente como…¿puedo pasar al pizarrón?*

Profesor:

Sí, por supuesto. Por favor, adelante.

El alumno escribe lo siguiente:

$$V_x \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Profesor:

Observen las rectas secantes que se van generando en su gráfica, esas rectas secantes van tendiendo o van acercándose a parecer una recta de tipo…

Alumnos:

Tangente.

Profesor:

Exacto. ¿Qué más pueden decir de todo lo que hemos revisado en esta clase?

Alumnos:

- *Cuando delta "t" se acerca a cero la recta secante se convierte en tangente.*
- *La rapidez media se convierte en rapidez instantánea cuando delta "t" se acerca a cero.*
- *La rapidez instantánea es la recta tangente.*

- *La rapidez media es la recta secante.*
- *Ah, entonces la relación delta “s” entre delta “t” es la pendiente de la recta secante.*
- *Sí, de la secante y de la tangente… si delta “t” se acerca mucho a cero, entonces es de la tangente.*
- *Profesor, ¿entonces podemos determinar la ecuación de cualquier recta tangente a la parábola, ya que tenemos un punto y su pendiente, verdad?*

Profesor:

Sí. Gracias por sus observaciones.

Además, ustedes revisarán todo este material, el próximo semestre, con el nombre de derivada.

Bueno, continuando con el problema, realicen más cálculos proponiendo “deltas” más pequeños, más cercanos a cero.

Los alumnos continúan realizando más cálculos.

Después de cierto tiempo (cinco a diez minutos), el profesor interviene:

Profesor:

Ya han realizado más cálculos, entonces se han dado cuenta que cuando delta “t” tiende a cero o se acerca a cero la rapidez tiende al valor de…

Alumnos:

- *Seis.*
- *Ah, ya entendí*
- *Hagamos otro cálculo.*
- *No está tan difícil*
- *Yo pensé que era otra cosa.*
- *Maestro, ¿esto lo revisaremos en cuarto semestre, verdad?*

Profesor:

Sí, en la materia de cálculo diferencial. Usarán los mismos razonamientos para llegar a la definición de la derivada. Traten de vincularlo con lo que han aprendido en este curso de física I.

Bueno, escriban sus conclusiones y nos vemos la próxima clase.

En las siguientes sesiones el profesor propone otros dos ejercicios del mismo tipo para que el estudiante reafirme sus aprendizajes.

El alumno, en cuarto semestre, revisará la definición de la derivada con ayuda del profesor y de diferentes textos. A continuación revisaremos el concepto de la derivada que proponen ciertos textos de matemáticas y física:

1.-A.G. Tsipkin (1985). Manual de matemáticas para la enseñanza media.

1.- Sea $f(x)$ cierta función, definida en el intervalo $(a; b)$, y x_0 cierto punto fijo de este intervalo. Tomemos un punto arbitrario x del intervalo $(a; b)$ y hagamos una diferencia

$$x - x_0$$

La diferencia $x - x_0$ se llama incremento del argumento de la función $f(x)$ y se designa Δx:

$$x - x_0 = \Delta x.$$

La diferencia entre el valor de la función en el punto $x = x_0 + \Delta x$ y el valor de la función en el punto x_0:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

se llama incremento de la función $f(x)$ en el punto x_0. El incremento de la función $f(x)$ en el punto x_0 se designa $\Delta f(x_0)$:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0).$$

Puesto que el punto x_0 se considera fijo, el incremento de la función $\Delta f(x_0)$ será la función del incremento del argumento Δx.

Se llama derivada de una función $f(x)$ en el punto x_0 al límite de la razón entre el incremento de la función $\Delta f(x_0)$ y el incremento de la variable independiente Δx para Δx que tiende a cero:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Si este límite existe, entonces se dice que la función $f(x)$ tiene una derivada en el punto x_0 o que la función $f(x)$ es diferenciable en el punto x_0.

2.- Edwards y Penney (1997). Cálculo diferencial e integral. México

La derivada de la función es la función *f '* definida por:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

para todo *x* donde exista este límite.

3.- Granville, William Anthony (2000). Cálculo Diferencial e Integral. México

Derivada de una función de una variable. La definición del cálculo diferencial es la siguiente:

La derivada* de una función es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando éste tiende a cero.

Cuando el límite de esta razón existe, se dice que la función es derivable o que tiene derivada.

La definición puede darse mediante símbolos, en la forma siguiente:

Dada la función

(1) $$y = f(x),$$

consideremos un valor inicial fijo de *x*.

demos a *x* un incremento Δx; entonces obtenemos para la función "y" un incremento Δy, siendo el valor final de la función

(2) $$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

Para hallar el incremento de la función, restamos (1) de (2); se obtiene

(3) $$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Dividiendo los dos miembros por Δx, incremento de la variable independiente, resulta:

(4) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

El límite del segundo miembro cuando $\Delta x \to 0$ es, por definición, la derivada de f (x), o sea, según (1), de "y", y se representa por el símbolo dy/dx. Luego, la igualdad

(A) $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

define la derivada de "y" [o de f (x)] con respecto a x.

De (4) obtenemos también

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Asimismo, si "*u*" es función de "*t*", entonces,

$$\frac{du}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}$$ = derivada de "*u*" con respecto a "*t*".

4.- James Stewart (2003). Cálculo diferencial e integral. México

Definición. La derivada de una función "*f*" en un número "*a*", denotado con $f'(a)$, es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

si el límite existe.

5.- López, Irma y Piotr Marian Wisniewski (2006). Cálculo diferencial de una variable con aplicaciones.

Definición: Sea $y = f(x)$ una función continua en $x = x_0$. Llamamos derivada de la función $y = f(x)$ en $x = x_0$ al

$$\lim_{\Delta X \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Si este límite existe, y lo denotamos como $f'(x_0)$ o como

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = x_0}$$

En este caso decimos que $y = f(x)$ es derivable en $x = x_0$.

Cabe mencionar que este texto trae como propuesta un problema para determinar la ecuación de la recta tangente en un punto de una parábola, antes de plantear la definición de la derivada. Su capítulo 3, donde se plantea la derivada, comienza con el tema: Definición e interpretación geométrica de la derivada.

6.- Oakley, C. O. (1979). Cálculo un enfoque moderno. Serie de compendios científicos. Primera edición en español. México.

La derivada

Hemos visto que la noción de integración surgió en relación con el problema de hallar el área encerrada por una curva. La diferenciación, o sea el proceso de hallar la derivada de una función, surgió del concepto geométrico de la tangente a una curva y del concepto físico de la velocidad.

Considérese la gráfica de una curva continua *f*, y sean *P* (x_0, $f(x_0)$) y *Q* ($x_0 + h$, $f(x_0 + h)$) dos puntos de la gráfica de la (Fig. 23). La pendiente m de la recta secante PQ es $[f(x_0 + h) - f(x_0)]/h$.

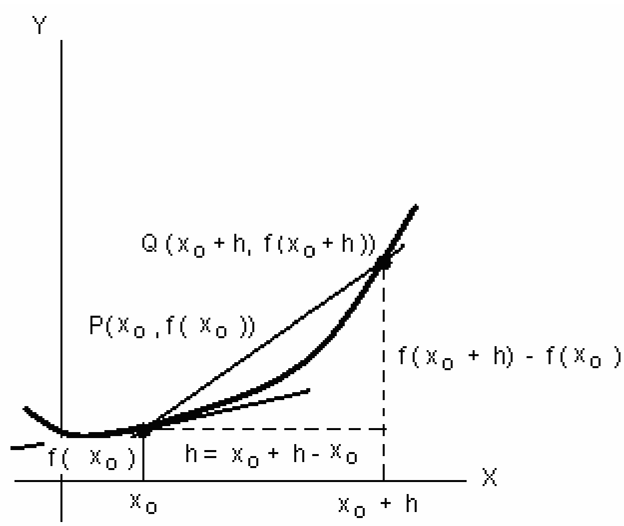


Figura 23

Puede suceder que cuando *Q* tiende a *P* a lo largo de la curva la recta secante tiende a una posición límite. Establezcamos este confuso lenguaje geométrico en una forma algebraica precisa: (1) puesto que *f* es continua, $f(x_0 + h) \to f(x_0)$ cuando $h \to 0$ y, por tanto, $f(x_0 + h) - f(x_0) \to 0$ cuando $h \to 0$, y (2) sin embargo, puede suceder que exista.

$$m(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \qquad (1)$$

Si este límite existe, llamamos a m (x_0) la pendiente de la recta tangente a la curva en *P*. La recta tangente en *P* se define como la recta que pasa por *P* con pendiente $m(x_0)$. La ecuación de la tangente es por tanto,

$$y - y_0 = m(x - x_0) \qquad (2)$$

Si el límite (1) no existe (es infinito), o si

$$\lim_{h \to 0} \frac{h}{f(x_0 + h) - f(x_0)} = 0$$

y si x_0 pertenece al dominio de *f*, la tangente es vertical en $x = x_0$.

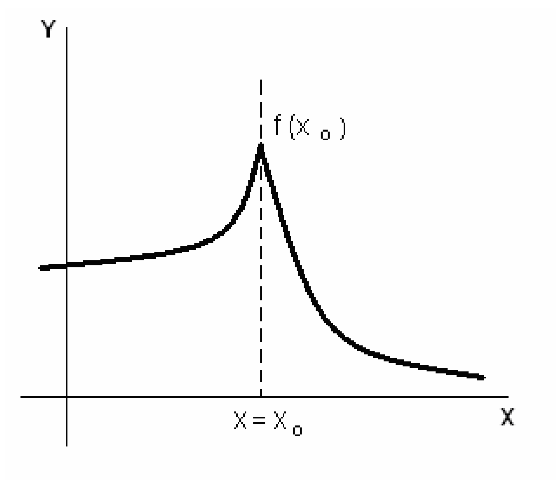


Figura 24

7.- Purcell E., Varberg D. y Rigon S. (2003). Cálculo Diferencial e Integral, octava edición. México.

La derivada: Hemos visto que pendiente de la recta tangente y la velocidad instantánea son manifestaciones de la misma idea básica. La tasa de crecimiento de un organismo (biología), la ganancia marginal (economía), la densidad de un alambre (física) y la velocidad de disolución (química) son otras versiones del mismo concepto básico. El buen sentido matemático sugiere que estudiemos este concepto de manera independiente de estos vocabularios especializados y sus aplicaciones diversas. Elegimos el nombre neutral de derivada. Añádase a función y límite como una de las palabras clave del cálculo.

Definición. Derivada

La derivada de una función *f* es otra función *f* ' (léase "f prima") cuyo valor en cualquier número c es

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Siempre que el límite exista y no sea ∞ o $-\infty$.

Si este límite existe, decimos que *f* es diferenciable en *c*. Determinar una derivada recibe el nombre de diferenciación; la parte del cálculo asociada con la derivada se denomina cálculo diferencial.

Cada uno de estos textos tiene todo un preámbulo enfocado a funciones, límites, etc., cuya intención es ofrecer, dichas herramientas matemáticas, como una introducción matemática hacia el concepto de la derivada; pero nuestra intención no es revisar, por el momento, dichos antecedentes. La intención de revisar el concepto de la derivada, en algunos textos usados en el nivel medio superior, es saber cómo el estudiante interpreta estas definiciones. Si observamos los conceptos de la derivada que ofrecen todos y cada uno de los textos anteriores nos damos cuenta que son muy parecidos, lo cual es natural, razonable y lógico, pero que elemento didáctico acompaña a estos conceptos para que el alumno pueda hacer propio el concepto de la derivada y lo pueda vincular con eficiencia a otras ciencias. Además, como es conocido por muchos de los que nos dedicamos a la docencia; el profesor hace propio uno o varios textos para exponer su clase, si la clase expuesta es una repetición del propio texto, qué está llevándose como aprendizaje el estudiante. Por lo anterior, se reitera en este trabajo de investigación que es necesario, para la enseñanza de las matemáticas, conocer la vinculación que existe entre los programas de estudio de la matemática y la física; este conocimiento de vinculación debe ser sociabilizado hacia el estudiante. Aunado a lo anterior, el profesor podrá tener un panorama más amplio, cuando conozca la vinculación entre los programas de estudio de las diferentes asignaturas, matemáticas y física, para poder descontextualizar lo que se revise en los textos y poder presentar, con un mayor apoyo, su información a los estudiantes, pudiendo garantizar el éxito de su enseñanza y muy seguramente, una atención total de sus estudiantes. Como ya se ha mencionado, lo anterior mejorará el aprendizaje de nuestros actuales estudiantes y el creciente gusto por la ciencia. En resumen, hemos revisado como el estudiante entiende la definición de la derivada, ayudado con la vinculación de dicho conocimiento con alguna realidad o necesidad ajena a la asignatura de matemáticas, por ejemplo el movimiento revisado en la asignatura de física. Pero también no deja de ser interesante como el estudiante interpreta dicho conocimiento, el de la derivada, cuando ya ha tenido una vinculación anterior con la física. Es decir, la definición de la derivada la ha vinculado antes y después de haber recibido, en matemáticas, dicha definición.

Veamos como el alumno es llevado, nuevamente, a revisar la definición de la derivada, pero en un tiempo posterior a la revisión de dicha definición. Para lo anterior, revisaremos otro problema de física que se presenta a los alumnos de cuarto semestre, en la asignatura de física II, dedicada principalmente a la cinética. Cuando este problema se presenta a los alumnos ellos ya revisaron la definición de derivada en matemáticas. El problema es el siguiente:

Un bloque de 2.14 kg se deja caer desde una altura de 43.6 cm contra un resorte de constante de fuerza k = 18.6 N / cm, como se muestra en la figura. Halle la distancia máxima de compresión del resorte.

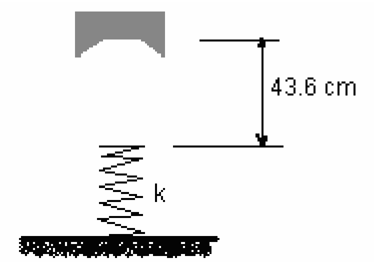


Figura 25

El profesor comienza su explicación:

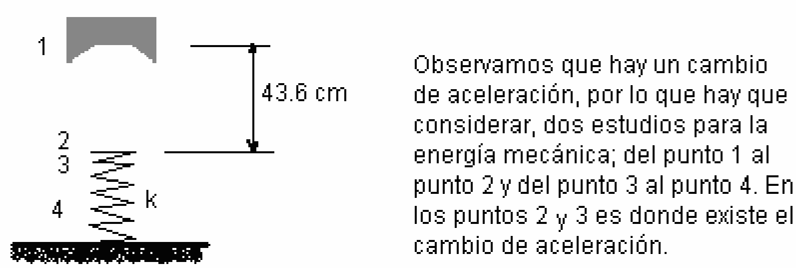
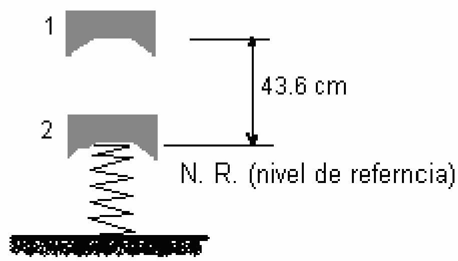


Figura 26

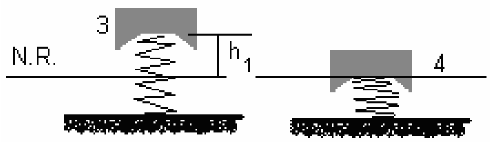


Primero:

Analizando la energía mecánica del punto 1 al punto 2. El profesor dice a sus alumnos: debemos considerar, en el punto 2, que el bloque está a punto de tocar el resorte pero no lo ha tocado, el bloque se encuentra un instante antes de tocar al resorte. Recuerdan ustedes cuando hablan de delta "t" tendiente a cero, en cálculo diferencial.

Figura 27

$$E_1 \begin{cases} U_1 = mgh \\ K_1 = 0 \end{cases} \qquad E_2 \begin{cases} U_2 = 0 \\ K_2 = \frac{1}{2} m v^2 \end{cases}$$



El profesor continua su explicación: ahora, analizaremos del punto 3 al punto 4. El punto 3 está muy cercano al punto 2; pero ahora, en el punto 3, el bloque ya ha tocado al resorte, apenas lo ha tocado, tiene un instante de haberlo tocado. Observen como en el punto 2 y en el punto 3 se considera al bloque muy cercano a la parte "inicial" del resorte (el profesor señalla la parte superior del resorte). Recuerdan ustedes, como en cálculo diferencial, han calculado límites de funciones por arriba y por abajo. Esos fueron sus primeros cálculos de límites. Observen la vinculación de esas definiciones con estos problemas

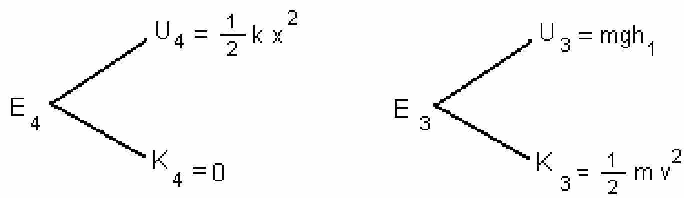


Figura 28

Se observa en las explicaciones del profesor de física que trata de vincular los conceptos de cálculo diferencial con su asignatura. El objetivo de esta vinculación, en este momento, es continuar reforzando los aprendizajes matemáticos del estudiante, que el estudiante vea aplicados o plasmadas las herramientas matemáticas en situaciones físicas y que las herramientas matemáticas le ayuden al profesor de física a enriquecer su clase para que el estudiante tenga un aprendizaje más global y de mayor significado.

Como podemos apreciar en este capítulo, el alumno ha sido conducido hacia el conocimiento de la derivada, sin usar las herramientas propias de la matemática, revisadas en la asignatura de cálculo diferencial. Se han propuesto al estudiante una serie de ejercicios que tienen como primera intención, en el tercer semestre, dos objetivos para él:

a) reforzar los conceptos de movimiento.
b) Introducirlo al concepto de la derivada, tema que revisará en el próximo semestre.

Como segunda intención, en el cuarto semestre, se busca que el estudiante enriquezca su conocimiento y el profesor enriquezca su clase. Se busca en ambos, una necesidad de hacer propio el conocimiento.

Cabe mencionar que cuando se hace la vinculación entre asignaturas y se muestra este trabajo y experiencias a profesores, estos se muestran también un tanto entusiasmados por que revisan algo diferente. Además, van reflexionando sobre la paridad y vinculación que van teniendo los programas de cada asignatura con las demás; es decir, como se vinculan los temas de matemáticas y física, en este caso para un mismo semestre escolar.

CAPÍTULO 7

El estudiante, el profesor y la presentación del saber matemático antes y después de la vinculación entre asignaturas.

Conclusiones.

Es necesario aclarar, al inicio del capítulo, que las conclusiones que se mostrarán aquí son referidas, principalmente a lo vivido en el “C. E. C. y T. “Juan de Dios Batiz Paredes”.

La vinculación entre la física y la matemática, como podemos observar, puede favorecer el interés del estudiante en la ciencia, así como la investigación del profesor (aspectos necesarios para la relación enseñanza-aprendizaje). La enseñanza de la matemática requiere del conocimiento de los tiempos en que vive la sociedad, sus necesidades y las expectativas que la misma sociedad tiene sobre su aprendizaje; es necesario entonces que los objetivos de enseñanza planteados por las instituciones sean congruentes con los de los profesores y los de los alumnos. La enseñanza de la matemática en vinculación con la física (en términos particulares el cálculo diferencial e integral en vinculación con la dinámica y en forma específica la vinculación del concepto de la derivada con el concepto de movimiento) muestra en forma local la necesidad actual de integración de las ciencias para el proceso de la enseñanza y el aprendizaje. El estudio al que se enfoca esta investigación es la vinculación de la matemática y la física, y en forma específica el auxilio de la dinámica para vincular el concepto de derivada con el entorno y las necesidades del estudiante, en los tiempos de post modernidad que vive nuestra sociedad.

No debemos descartar que dentro de la vinculación entre asignaturas, nuestro Instituto Politécnico Nacional está trabajando por líneas de nuevos proyectos, como el proyecto aula donde se están concentrando esfuerzos para poder vincular las asignaturas que el estudiante cursa en sus diferentes semestres, esta vinculación se está llevando a cabo mediante la contextualización de las ciencias al entorno del estudiante, considerando el entorno del estudiante mediante problemas o proyectos de interés común. Nuevamente, observamos en este proyecto la búsqueda de enlace entre ciencias, que encausen al estudiante a relacionar sus conocimientos adquiridos tanto en matemáticas como en física así como en las demás asignaturas. Continuando con esta línea de enlace entre ciencias y de los medios disponibles para poder lograr dicho enlace, es necesario hacer, nuevamente, un paréntesis aquí; he hablado de la valoración que el profesor debe dar a su quehacer y de la sociabilización que él como hacedor de su propio constructo de conocimiento está obligado a realizar, dicha sociabilización será con su entorno escolar (alumnos, colegas, funcionarios, etcétera). El profesor debe revisar, como ya lo mencioné, en forma vertical y horizontal los alcances y los medios disponibles que pueda tener él para lograr sus objetivos de enseñanza, de lo contrario el profesor estará trabajando a sentimiento (término que he usado para indicar cuando no tenemos el conocimiento de para qué estamos enseñando, qué es lo que estamos enseñando, dónde lo estamos enseñando, cuál es el objetivo de nuestra enseñanza, qué es lo que pretendemos con nuestra enseñanza, etcétera).

Como un comentario adicional a lo anterior y haciendo una paridad con los momentos y cambios que está viviendo el IPN, la propuesta de vinculación entre asignaturas para la enseñanza de las matemáticas y de la física se inserta también en el marco de necesidades del IPN. Por lo antes mencionado expongo en este apartado las preguntas y comentarios más comunes, hechos por profesores, administrativos y en general por la comunidad politécnica, que se suceden con respecto al proyecto aula, dichas preguntas son similares a las que yo me planteé en un principio cuando inicié esta investigación:

-¿Qué es el proyecto aula?

-¿Cuál es el objetivo del proyecto aula?

-¿Existe alguna vinculación del proyecto aula con nuestras necesidades como sociedad: industria, servicios, educación, medio ambiente?

-¿Si existe la vinculación anterior, quién la está realizando para que nos pueda informar como profesores?

-¿Realmente ha beneficiado el proyecto aula a nuestra comunidad estudiantil?

-¿Qué respuestas hemos encontrado de alumnos y profesores sobre el proyecto aula?

-¿Nuestros alumnos realmente están siendo mejor preparados?

-¿Si el proyecto aula se ha realizado en otros países cuales han sido los resultados a corto mediano y largo plazo?

-¿Las características que tiene los países donde se ha implementado el proyecto aula, realmente son acordes a nuestras características como nación?

-¿Tenemos como institución y como país la infraestructura para llevar a cabo en forma eficiente el proyecto aula?

Obviamente, como esta investigación no está enfocada al proyecto aula no se plantearán las posibles respuestas a las preguntas anteriores ni se aunará más en el tema. Se reitera que lo anterior es solamente una referencia para observar las necesidades que vive nuestra comunidad escolar.

Como lo mencioné, muchas de estas preguntas son similares a las que yo me plantee al inicio y durante el transcurso de esta investigación; la cual está encausada a la mejora de la enseñanza de las matemáticas y física, vinculando asignaturas. Las preguntas que me hacía eran:

¿Qué pretendo al vincular asignaturas, cuando enseño física o matemáticas?

¿Realmente, el alumno aprenderá mejor?

¿Estoy preparado para enseñar vinculando asignaturas?

¿Los alumnos están en el momento adecuado para revisar conceptos, vinculando asignaturas?

¿Será del interés del alumno conocer como se vinculan sus asignaturas, en el momento en que esté recibiendo su enseñanza escolar?

¿Habrá instituciones donde se estén realizando estos espacios de vinculación?

¿El alumno está entendiendo mejor mis explicaciones?

¿El alumno, realmente, está respondiendo a las expectativas de aprendizaje planteadas por el instituto y por mí?, etc.

Como pudimos observar en los capítulos anteriores de este trabajo, todas estas preguntas han tenido una respuesta y se sigue la reflexión, sobre la misma línea de vinculación entre asignaturas, para buscar mejores resultados tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de la matemática y la física.

Por otra parte, observamos que el entorno social y los tiempos postmodernos (entre otras cosas) que vivimos nos exigen cambios que puedan dar respuesta a las necesidades de nuestra sociedad y el proceso de enseñanza-aprendizaje no es ajeno a estos cambios. Por lo que este trabajo también responde a las necesidades actuales de la enseñanza de las matemáticas, considerando múltiples factores (sociales, económicos, de cultura, etcétera).

Con lo anterior quiero entonces ser realista de lo que podemos hacer como profesores al visualizar una problemática de enseñanza y poderle hacer frente. Por lo tanto, a las preguntas anteriores anexo las siguientes:

-¿Cuáles son las necesidades que debemos cubrir en el estudiante para interesarlo en el estudio de las ciencias?
-¿Realmente lo que estamos proponiendo, como profesores, en nuestro salón de clases es lo que el alumno necesita para ser una persona crítica y autónoma?
-¿Realmente buscamos como objetivo que el alumno sea una persona crítica y autónoma?
-¿Conocemos las características de nuestros alumnos?
-¿En que situación del proceso enseñanza-aprendizaje están viviendo otras sociedades parecidas a la nuestra?
¿Sabemos lo que buscan y esperan nuestros alumnos cuando ingresan a una escuela como la nuestra?
¿Sabemos lo que esperan nuestros alumnos de nuestra enseñanza?
¿Realmente, estamos valorando nuestro quehacer como profesores?
¿Tenemos el tiempo y las condiciones necesarias para hacer esa valoración?
¿Se tiene un objetivo propio y común en la relación profesor, alumno y conocimiento?
¿Qué cambios se han notado en los estudiantes con la nueva propuesta?
¿Nuestros programas de estudio, en las diferentes ciencias, tienen objetivos en común?

Las preguntas anteriores y no dudo que puedan existir más nos manifiestan un quehacer colaborativo; además, creo necesario el plantearnos preguntas como las anteriores entre muchas otras más para poder dar respuesta a las necesidades de enseñanza y de aprendizaje de los contenidos del saber o conocimiento que nos corresponde ofrecer como profesores.

Creo que no debemos perder de vista que nuestro objetivo como profesores debe ser el de formar gente crítica, pensante, analítica que trabaje por el bien común. Además, uno de nuestros objetivos, dentro de nuestra actividad docente, es ir encausando al estudiante a la necesidad de creer, en nuestra época de post-modernidad, en la ciencia y sobre todo en su formación científica. El estudiante, bien encausado por el profesor, debe sentir la libertad de buscar los vínculos necesarios para relacionar su entorno natural con su razonamiento; además, debe creer en la valoración que tiene su formación científica y humana, muy descuidadas en nuestro tiempo.

Como se ha planteado, en los capítulos anteriores, es necesario que el profesor de matemáticas, diseñe, adecue, proponga, modifique, etc. sus ambientes escolares, dentro de la comunidad escolar donde el se ubique, como una tarea necesaria de su labor docente. Por otra parte, el alumno debe estar enterado de lo que él necesita para poder cumplir los objetivos de su formación académica; es decir, el estudiante se debe preguntar sobre las necesidades que debe satisfacer él como estudiante para ingresar a cierta institución o cursar ciertos estudios. Debe preguntarse por sus cualidades, necesidades, límites, capacidades, etc. En resumen, el estudiante debe cuestionarse sobre lo que él, como estudiante, necesita para poder pertenecer a cierta comunidad escolar y vivir con éxito dentro de ella.

De acuerdo a los planteamientos observados en este capítulo y al trabajo realizado en esta investigación se concluye que la vinculación entre asignaturas para la enseñanza de las matemáticas es un medio por el cual se puede favorecer el trabajo colaborativo entre el profesor, el estudiante y el conocimiento. Es necesario que se relacionen los objetivos buscados por el profesor, el estudiante y el conocimiento, para formar una comunidad de conocimiento sólida. La vinculación entre asignaturas para la enseñanza de las matemáticas permite que los tres actores del proceso enseñanza- aprendizaje: profesor, alumno y conocimiento, puedan distinguir con mayor claridad un objetivo común. Cuando el conocimiento está dispuesto de manera clara y congruente, proponiendo y manteniendo la necesidad de lo que se pretende con él, el profesor tendrá mayor campo de acción para poder contribuir con ambientes escolares cada vez más pertinentes y favorables para el aprendizaje del alumno y la enseñanza del profesor; en esta línea, el alumno se ve favorecido por la integración que están teniendo sus enseñanzas, ya que hay en la propuesta de sus enseñanza objetivos comunes de trabajo. No es conveniente para nuestra sociedad escolar, y en general para toda comunidad seguir trabajando en forma aislada. Necesitamos formar sociedades de conocimiento; sólidas, creíbles, con oportunidad de innovación y cambio para la mejora de ellas mismas, duraderas y que satisfagan las necesidades actuales de nuestra sociedad; y creo que la vinculación entre asignaturas es uno de los medios para comenzar con el fortalecimiento del conocimiento científico en nuestra sociedad.

Al vincular asignaturas en la enseñanza de la matemática, el profesor muestra, al alumno, concepciones distintas de un saber o conocimiento matemático. Con esta forma de presentar la enseñanza de las matemáticas, el profesor tiene una no marcada forma de seguir una misma ruta didáctica para todas sus sesiones de clase; es decir su versatilidad aumenta al proponer, de forma más atinada, su enseñanza en diferentes escenarios de aprendizaje. Si el profesor tiene esa versatilidad, entonces el alumno puede tener más oportunidad de explicaciones diversas sobre un mismo conocimiento matemático.

Al vincular las asignaturas en la enseñanza de las matemáticas se pretende que los conocimientos o saberes de ésta no aparezcan aislados y desconectados, tanto en el profesor como en el estudiante. Con la vinculación entre asignaturas para la enseñanza de las matemáticas se pretende, también, desmantelar paradigmas de enseñanza obsoletos.

La propuesta de esta investigación en la dirección de vincular asignaturas para mejorar la enseñanza de la matemática, proponiendo nuevos ambientes, se manifiestan en todo sentido en la búsqueda de nuevas alternativas de enseñanza y en una preocupación del profesor por dar respuesta a las constantes preguntas de los alumnos, sobre el uso del conocimiento o saber matemático.

Es interesante observar como el estudiante, el profesor y el conocimiento se “comprometen” para dar una alternativa más de “crear” conocimiento en ambientes móviles (pasar de un ambiente físico a un ambiente matemático y viceversa) que permitan nuevos escenarios escolares que fomenten, entre otras cosas, la necesidad de continuar en la búsqueda de otras vinculaciones que fortalezcan la enseñanza y el aprendizaje.

Finalmente, la vinculación entre asignaturas para la enseñanza de las matemáticas, ha permitido observar que el profesor, el alumno y el conocimiento matemático se contextualicen en ambientes físicos; ambientes que en un momento podrían parecer distantes pero que la realidad es todo lo contrario. Lo cual ha permitido tanto para el alumno, como para el profesor y el conocimiento llegar a un objetivo común perceptible, la utilidad del saber matemático. Aunado a lo anterior, encontramos en la actualidad textos de física con la leyenda de: basados en el cálculo; además, tenemos sociedades que, actualmente, se han dado cuenta de la necesidad de que las academias de matemáticas y física trabajen en conjunto.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artículo en Internet basado en una fuente impresa. Crisólogo, D. (2006) La derivada y el cálculo.[Versión electrónica]. *Una mirada sobre su enseñanza por medio de los textos y programas*, pp. 169-201.

Artículo en Internet basado en una fuente impresa. Del Puerto, S., Minnaard, C., Seminara, S. (2207).. Análisis de errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas. [Versión electrónica] *Revista Iberoamericana de Educación*, Argentina.

Artículo en Internet basado en una fuente impresa. Dolores, C., Martínez, G. (2003). *Análisis del discurso matemático escolar I*. [Versión electrónica] CICATA, IPN.

Artículo en Internet basado en una fuente impresa. Meza, E., Dolores, C. *El uso social de las gráficas: El caso de los lectores de periódicos y revistas".* [Versión electrónica]. Centro de Investigación en Matemática Educativa de la Universidad Autónoma de Guerrero, pp. 1-10.

Artículo en Internet basado en una fuente impresa. Rico, L. Complejidad del currículu de matemáticas como herramienta profesional. [Versión electrónica] *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Distrito Federal, México, pp. 22-39.

Artículo en Internet basado en una fuente impresa. Rizo, C., Campistrous L. Estrategias de resolución de problemas en escuela. [Versión electrónica]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, noviembre, año/ vol.2, número 2-3. Distrito Federal, México, pp. 31-45.

Artículo en Internet basado en una fuente impresa. Ruíz, J., Martínez, T.(2006). Estrategia didáctica para la formación integral del estudiante de bachillerato mediante el proceso de enseñanza-aprendizaje de la física. [Versión electrónica]. *Revista Iberoamericana de Educación*. Núm. 40/10.

Artículo en Internet basado en una fuente impresa. Toranzos, L. (2000). *Evaluación educativa: una aproximación conceptual.* [Versión electrónica] Buenos Aires, Argentina.

Bustamante, Y., Villa, E., Parada, E., Fabila, L., Pallán, C., Marúm, E., Ambriz, R. (2004). *Modelo de integración social del IPN*: *Programa Estratégico de vinculación, internacionalización y cooperación*. (Volumen 6, pp. 35-40, 70-75). Materiales para la reforma, Instituto Politécnico Nacional.

Cantoral, R. (2001). *Un estudio de la formación social de la analiticidad*, México, D.F., México.: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R., Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* Vol.6, Núm.1, México.

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanís, J., Rodríguez, R., Garza, A. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México, D.F., México.: Trillas.

Castañeda, A. (2004) *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión.* Tesis doctoral no publicada, CICATA-IPN, México, D.F., México.

Chevallard, Y., Bosch, M., Gascón, J. (1998). *Estudiar Matemáticas: El eslabón perdido entre la enseñanza y aprendizaje.* México.

Dolores, C. (2004). Matemática Educativa: Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas*:* Concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en*, *Matemática Educativa*, 7 (3), 195-215.

Edwards, C. Jr., Penney, D. (1997). *Cálculo diferencial e integral*. (Palmas, O., Trad.). México, D.F., México.: Pearson Educación.

Fernández, M. y Rondero, C. (2004). Matemática Educativa: El inicio histórico de la ciencia del movimiento: Implicaciones epistemológicas y didácticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 7 (2), 145-155.

Gallego, R. (2001). *Discurso constructivista sobre las tecnologías*: Una mirada epistemológica. (pp. 12-14, 153-200). México, D.F., México.: Cooperativa Editorial Magisterio.

Garcés, G. (1995). *Pensamiento Matemático y Astronómico en el México Precolombino*. (pp. 1-7). México, D. F., México.: Instituto Politécnico Nacional.

González, A. *La física como proveedor de contextos para el entendimiento del cálculo.* Facultad de Ciencias Universidad de Colima, Colima, arturog@cgic.ucol.mx.

Granville, W. (2000). *Cálculo diferencial e integral*. (Wiley, J. y Bygton, S., Trad.). México, D.F., México.: Limusa Noriega Editores.

Koyre, A. (2001). *Estudios Galileanos*. (González, M., Trad.). (pp. 1-26). México, D.F., México.: siglo veintiuno editores. (Trabajo original publicado en 1966).

Leithold, L. (1998). *El cálculo*. (Mata, F., Traduc.) (pp. 101-122). México, D. F., México.: Oxford. (Trabajo original publicado en1994).

López, I., P. Wisniewski. (2006). *Cálculo diferencial de una variable con aplicaciones.* México, D.F., México.: Thomson.

Mochón, S. (2004). *El cálculo desde una perspectiva visual y dinámica con actividades en la computadora*. México, D. F., México.: Mc Graw Hill.

Oakley, C.(1979). *Cálculo, Un enfoque moderno* (Ayala, I., Trad), México D. F., México.: CECSA. (Trabajo original publicado en 1971).

Oriol, A., Espinosa P. (2002). *Filosofía de la ciencia*. México, D.F., México.: Instituto Politécnico Nacional.

Prado, E. (2005). *Mecánica analítica.* (pp. 57-74). México, D.F., México.: Instituto Politécnico Nacional.

Purcell, E., Varberg, D., Rigdon, S. (2003). *Cálculo diferencial e integral*, (Ibarra, V. y Palma, O., Traduc.). México, D.F., México.: Perason educación. (Trabajo original publicado en 2000).

Resnick, R., Halliday, D., Krane, K. (2003). *Física* (volumen 1). (Andino, F., Trad.). México, D.F., México.: CECSA. (Trabajo original publicado en 1992).

Rico, L., y Castro E. (1994). "*Errores y dificultades en el desarrollo del pensamiento numérico*". http://ddm.ugr.es/gpnumerico/numerico_es.html.

Ruiz, F. (2000). *La educación en México*. (pp. 7-12, 29-36). México, D.F., México.: Instituto Politécnico Nacional.

Ruiz, M. (1999). *Didáctica del enfoque comunicativo.* (pp. 49-60). México, D.F., México.: Instituto Politécnico Nacional.

Salinas, P., Alanís, J., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J., Garza, J. (2003). *Elementos del cálculo*: Reconstrucción conceptual para el aprendizaje y la enseñanza. México, D.F., México.: Trillas.

Serway, R., Beichner, R. (2002). *Física para ciencias e ingeniería* (Tomo 1). (Campos, V. y García, A., Traduc.). México, D.F., México.: Mc Graw Hill. (Trabajo original publicado en 2000).

Stewart, J. (1999). *Cálculo diferencial e integral*. (Hernán, J., Trad.) México, D.F., México.: Internacional Thomson Editores. (Trabajo original publicado en 1998).

Tsipkin, A. (1985). *Manual de matemáticas para la enseñanza media.*, (Shapovalova, T., Trad.). México, D.F., México.: Editorial Mir Moscú. (Trabajo original publicado en 1979).