INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

CENTRO DE INVESTIGACION EN CIENCIA
APLICADA Y TECNOLOGIA AVANZADA

ESTUDIO SOCIOEPISTEMOLÓGICO DE LA TANGENTE

Tesis que para obtener el grado de
Maestro en Ciencias en Matemática Educativa

Presenta:
Luís Arturo Serna Martínez

Directores de Tesis:
Dr. Apolo Castañeda Alonso

México, D. F., Agosto de 2007

SIP-14

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 8 del mes de Agosto del 2007 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de Cicata-IPN, Legaria para examinar la tesis de grado titulada:

Estudio socioepistemológico de la tangente

Presentada por el alumno:

Serna	Martínez	Luis Arturo
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro: | A | 0 | 5 | 8 | 4 | 1 | 2 |

aspirante al grado de:

Maestro en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

CICATA- IPN
Posgrado en
Matemática Educativa

Dra. Gisela Montiel Espinosa

Dr. Gustavo Martínez Sierra

Dr. Ricardo Cantoral Uriza

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

COORDINACION GENERAL DE POSGRADO E INVESTIGACION

CARTA DE CESION DE DERECHOS

En la ciudad de México D. F. el día 8 del mes de agosto del año 2007, el que suscribe **Serna Martínez Luis Arturo**, alumno del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro: **A058412** Adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN, manifiesta que es autor intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección del Dr. Apolo Castañeda Alonso

Cede los derechos del trabajo intitulado **Estudio Socioepistemológico de la tangente**

al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de Investigación. Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual gráficas o datos del trabajo sin permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección: luisarturo_sernamartinez@yahoo.com.mx Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Luis Arturo Serna Martínez

Agradecimientos

Índice

ÍNDICE DE IMÁGENES

RESUMEN

El objetivo del presente trabajo de investigación es estudiar el fenómeno didáctico que se presenta en los alumnos que cursan la materia de Cálculo Diferencial, el cual consiste en la dificultad de establecer una conexión entre la tangente estática vista en cursos anteriores y la tangente variable (dinámica), este problema es enunciado en Martínez (2005). En la materia de Cálculo Diferencial se enuncia de manera explicita a la recta con tangente variable al estudiar la derivada, máximos y mínimos y en las interpretaciones gráficas, sin embargo no existe un vinculo definido en los textos entre la tangente estática y la tangente dinámica, de tal forma que los alumnos tampoco pueden relacionar a la derivada con una recta tangente, este problema es enunciado también en Cantoral (2000) y Artigue (1998).

Nuestra investigación se encuentra dentro de la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional la cual se encarga de estudiar los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de conceptos matemáticos en donde se encuentran involucradas ideas de variación y cambio en el sistema educativo y medio social en que se encuentra presente, esta línea de investigación se encuentra situada dentro del seno de la aproximación teórica la Socioepistemología.

Tomamos como marco de referencia a la Socioepistemología, la cual es una aproximación teórica de tipo sistémica que toma en cuenta cuatro componentes que son: la cognitiva, la didáctica, la epistemológica y la social. La componente social modifica sustancialmente a las otras tres componentes. En nuestra investigación se tomaron en cuenta la componente epistemológica y la social. Se analizaron obras antiguas eruditas y también obras cuya intencionalidad era la difusión del conocimiento en ambientes no eruditos, por último se analizo un libro de texto escolar cuya primera edición es de 1904 pero que se encuentra vigente en nuestros días. El producto de nuestra investigación puede contribuir a crear secuencias de aprendizaje que permitan construir a la tangente variable desde un punto de vista variacional, con lo cual se tendrán elementos para abordar el concepto de derivada de manera más significativa y eficaz, a su vez consideramos que también contribuye para rediseñar el discurso matemático escolar actual.

ABSTRACT

The objective of the present work of investigation is to study the didactic phenomenon that appears in the students who attend the matter of Differential Calculus, which consists of the difficulty to establish a connection between the static tangent studied in previous courses and the variable tangent (dynamic), this problem is enunciated in Martinez (2005). In the matter of Differential calculus it is enunciated of way specifies to the straight line with variable tangent when studying the derivative, maximums and minimums and in the graphical interpretations, nevertheless do not exist a tie defined in texts between the static tangent and the dynamic tangent, of such form that the students cannot either relate to the derivative one to a tangent straight line, this problem is also enunciated in Cantoral (2000) and Artigue (1998).

Our investigation is within the line of investigation of the Variational Thought and Language which is in charge to study the phenomena of education and learning of mathematical concepts in where they are involved ideas of variation and change in the educative system and social means in which one is present, this line of investigation is located within the sine of the theoretical approach the socioepistemology.

We took as frame from reference to the Socioepistemology, which is a theoretical approach of systemic type that takes into account four components that are: the cognitive, the didactics, epistemological and the social one. The social component modifies substantially to the other three components. In our investigation the epistemological component and the social one were taken into account. Erudite old works were analyzed and also works whose intentionality was the diffusion of the no erudite atmosphere knowledge, finally I analyze a scholastic text book, whose first edition is of 1904 but which it is effective in our days. The product of our investigation can contribute to create learning sequences that allow to construct to the variable tangent from a variacional point of view, with which elements will have to approach the concept of derived from more significant and effective way, we considered as well that also it contributes to redesign the present scholastic mathematical speech.

GLOSARIO

Discurso Matemático Escolar:

Se puede decir que básicamente esta formado por dos componentes que son los libros de texto en los cuales se basa la enseñanza y el profesor. Los libros de texto que también se encuentran inmersos dentro de un ambiente sociocultural el cual repercute en ellos, tratan diferentes temas pero aunque fueran los mismos, los pueden abordar de forma diferente en sus explicaciones, en la forma de presentarlos, en las actividades en los problemas, etc. También se considera la componente epistemológica en el conocimiento en la constitución de los textos escolares para abordar su análisis.

Enfoque sistémico:

Enfoque utilizado en Matemática Educativa que toma en cuenta los componentes del sistema para dar explicaciones acerca de los fenómenos didácticos, se considera que cada una de las componentes del sistema son interdependientes entre sí. Para hacer un análisis del mismo se puede considerar a cada componente por separado, sin embargo si hay partes del sistema que no pueden ser explicadas por sus componentes sino a través del todo, se dice que estas partes son una propiedad del sistema emergente.

Fenómeno Didáctico:

Problemática que surge en el sistema escolar en donde están involucrados por lo menos tres elementos que son: el profesor, el alumno y el conocimiento. Una de los objetivos del matemático educativo es detectar e intervenir benéficamente para la solución de las problemáticas existentes en el sistema escolar.

Recta tangente a una función localmente:

Aquella recta que toca (tiene el mismo valor) que la función esto tomando en cuenta una región de la función cercana al punto de tangencia ya que una región distante a este punto podría volver a tocarla y/o cortarla.

Recta tangente a una curva (función) globalmente:

Aquella que toca (tiene el mismo valor) que la curva en un solo punto y no la vuelve a tocar y/o cortar en ningún otro punto, es decir la recta tangente a un lado de la curva (a toda ella).

Secuencia Didáctica:

Es un producto para la enseñanza que consiste de una secuenciación de situaciones adidácticas el cual su orden y sentido esta influenciado por la Ingeniería Didáctica.

Sistema:

Conjunto de componentes interconectadas entre sí y que funcionan como un todo.

Sistema Didáctico:

Objeto mínimo de estudio de la matemática educativa en donde son considerados, tres actores fundamentales en los sistemas escolares, los cuales son el alumno, el profesor y el conocimiento y las interacciones que hay entre ellos pueden estar más centradas a las relaciones: profesor – alumno, profesor – conocimiento, así como alumno – conocimiento. Sin embargo en un fenómeno didáctico intervienen los tres actores.

Socioepistemología:

Aproximación teórica que tiene un enfoque sistémico, es utilizada en Matemática Educativa en donde se tiene como objeto de estudio los fenómenos didácticos que se presentan en situaciones escolares, se consideran cuatro componentes que son: la didáctica, la cognitiva, la epistemología y la social. La componente social toma en cuenta los escenarios socioculturales en donde se surge el conocimiento, la componente cognitiva toma en cuenta la parte social y la componente didáctica da explicaciones del discurso matemático escolar en función de la componente social.

Tangente Dinámica:

La recta tangente a un punto (localmente) de una función (diferente a una función que representa a una línea recta), la cual va a ir cambiando de dirección conforme sea el punto de la función que se este analizando.

Tangente Estática:

La recta tangente que toca a un punto de una curva (cónica) y no la vuelve a tocar en ningún otro punto más.

INTRODUCCIÓN

Nos hemos encontrado que un problema recurrente en la asignatura de Cálculo Diferencial entre los estudiantes se refiere a la ausencia de significados de los conceptos y de recurrir frecuentemente a la algoritmia y a los desarrollos algebraicos. De esto nos podemos percatar por los resultados de diversas investigaciones realizadas entre las cuales están: Cantoral y Resendiz (2003), Artigue, M. (1998), Marcolini y Perales (2005) y González (1999) entre otros, uno de los problemas particulares vistos en Cálculo es la falta de significado en el alumno sobre el concepto de derivada.

En situaciones gráficas, la derivada está vinculada con la tangente, esta tangente se asocia con la variación de la curva y va a tomar un valor diferente en cada punto de la misma por tal motivo proponemos denominarla como una tangente dinámica o tangente variable, sin embargo el concepto de tangente se trata con anterioridad en los planes de estudio, en la Geometría Euclidiana se le considera recta tangente a una curva a aquella que la toca en un solo punto sin volverla a tocar nuevamente, posteriormente la tangente es vista nuevamente en la asignatura de Geometría Analítica, aunque en esta asignatura más bien es tratada como la pendiente de una recta, como sabemos la pendiente esta asociada con la tangente del ángulo de inclinación por la expresión $m = tg\alpha$, siendo α el ángulo de inclinación, por lo tanto en el discurso utilizado en la materia en muy pocas ocasiones se considera a la tangente, lo que se toma en cuenta frecuentemente es el número asociado a la tangente del ángulo de inclinación, es decir a la pendiente, en los libros de texto y de manera particular el libro de Lehmann, el cual es todavía muy utilizado, así como en algunos otros textos, se puede verificar el tratamiento que se le da a la pendiente, este concepto es explicado utilizando el teorema de Pitágoras, haciendo uso de la metodología propia de Geometría Analítica empleando coordenadas rectangulares y para obtenerla se requiere conocer dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ así como haciendo uso de fórmulas para calcular distancias, pero no se muestra el carácter variacional que tiene la pendiente.

Al resolver los alumnos problemas en donde se vea involucrada la pendiente, la calculan con la fórmula que les fue proporcionada en el curso y la utilizan sin realmente entender que significa la pendiente como un número y como se relaciona esto con la tangente de la recta, posteriormente en la materia de Cálculo se vuelve a retomar el tema de tangente, nada más que ahora de una forma diferente; ya que el valor de la derivada en cualquier punto se le define como la pendiente de la recta tangente a la curva (dependiendo del autor algunos dicen gráfica o función) en aquel punto, por lo tanto en cada punto de la función se tendrá un valor de la derivada, por lo que se tendrá un valor de la pendiente de esta recta tangente el cual está cambiando y consecuentemente se tiene una tangente dinámica o variable, los profesores dan por sentado que el estudiante puede crear un vínculo entre la pendiente vista como un número (tangente estática) y la pendiente variable (tangente dinámica), aunque la creación de tal vínculo regularmente no existe, esto ha sido reportado también por algunos investigadores, como son: Artigue (1998), Cantoral (2000), Martínez, R. (2005), de tal forma que nuestro trabajo de investigación pretende proporcionar elementos que posibiliten la creación de secuencias de aprendizaje en donde el alumno pueda construir el concepto de tangente dinámica desde un punto de vista variacional, así como también proveer elementos con los cuales se pueda resignificar el discurso matemático escolar actual.

La Matemática Educativa pretende incidir benéficamente en los sistemas escolares, tomando como unidad mínima de objeto de estudio al sistema didáctico, en donde se encuentran relacionados en el sistema de enseñanza-aprendizaje tres actores fundamentales que son: el estudiante, el profesor y el conocimiento dentro de un contexto sociocultural.

La socioepistemología es una aproximación teórica que toma en cuenta los tres actores mencionados anteriormente, pero además considera una componente más, es la social y que afirmamos afecta sustancialmente a las otras tres componentes, es también un enfoque sistémico en donde una variable importante a considerar es el ambiente sociocultural que impera en donde se origina el conocimiento, así como las prácticas sociales que propician el nacimiento y desarrollo de los conceptos, los paradigmas existentes en cada época también son determinantes, las formas de difusión del conocimiento ya sea que el conocimiento se quiera difundir a comunidades científicas o a un ambiente no erudito. Es indispensable tomar en cuenta tales situaciones, ya que la intencionalidad en cada caso es diferente y por lo tanto la forma de transmisión de las ideas también, en el primer caso lo que se pretende es difundir la ciencia con la intencionalidad de hacerla avanzar, en el segundo caso lo que se persigue es hacer accesible a un público no propiamente erudito los conceptos matemáticos, en esta última situación decimos que existe una transposición didáctica.

Este trabajo de investigación se encuentra dentro de la línea de investigación de Pensamiento y Lenguaje Variacional, la cual está bajo el seno de la socioepistemología; estudia los fenómenos de cambio y variación y posee una triple orientación. En primer lugar estudia estructuras variacionales específicas desde un punto de vista matemático y epistemológico; en segundo lugar estudia las funciones cognitivas que desarrollan las personas que estudian los fenómenos de cambio; en tercer lugar estudia los problemas y situaciones que se resuelven en la sociedad, utilizando las estructuras de los fenómenos variacionales.

La metodología a utilizar para poder llevar acabo nuestro objetivo es la Ingeniería Didáctica. En su fase preliminar se hará un estudio socioepistemológico, revisando obras antiguas eruditas, obras antiguas de difusión y un texto escolar que se publicó por primera vez en 1904, pero se encuentra vigente en nuestros días, se revisará en dónde se encuentra presente el concepto de recta tangente, reconociendo cuando esta tangente es vista desde un punto de vista estático o global considerándola como aquella recta que toca a la curva en un solo punto y desde un punto de vista dinámico o local, sin embargo la revisión no será exclusivamente epistemológica ya que se pondrá atención también en la componente social, por lo que se revisarán los usos que se le ha dado a la tangente dependiendo del momento histórico revisado, así como el paradigma existente en cada época. Se vera de la misma manera si el concepto emerge como consecuencia de la práctica social, así como la forma en que se difunden las ideas, todos estos aspectos que toma en cuenta la componente social, tradicionalmente no son considerados en una Ingeniería Didáctica, por eso es que decimos que se está llevando acabo una extensión de la Ingeniería Didáctica.

El análisis de las obras revisadas se llevó a cabo tomando en cuenta diferentes momentos históricos, dentro de los cuales tenemos: Etapa anterior a la formulación formal del Cálculo, etapa de la formulación formal del Cálculo, etapa de difusión en ambientes no eruditos, etapa posterior a la definición formal del Cálculo. En la primera etapa, consideramos a obras eruditas anteriores a las de Newton y Leibniz, las obras revisadas en esta etapa corresponden a Nicolás Copérnico, Galileo Galilei, Pierre de Fermat, René Descartes e Isaac Barrow. Al revisar las obras nos dimos cuenta que Copérnico tenia ideas de tipo variacional, concebía ideas parecidas al límite que manejamos actualmente, el lograba ver que al tomar una parte de una curva demasiado pequeña, llegaba un momento que la curva y la recta tangente parecían que fueran una misma cosa en una muy pequeña región, cuando el arco era demasiado pequeño se podía utilizar a la tangente para establecer una relación entre la subtensa y el arco que la comprende de manera proporcional, y con base a esto pudo elaborar las tablas que le auxiliarían en sus cálculos astronómicos. Después se revisó a Galileo y lo que observamos es que utilizaba a la tangente junto con otros argumentos geométricos como herramientas para resolver otros problemas, posteriormente se analizó el método de Fermat para encontrar la tangente así como la obtención de máximos y mínimos, en el caso de la tangente en esa época era un problema en si mismo el poder calcularla, pero también la usó Fermat en el cálculo de los máximos y mínimos. En ambos casos Fermat emplea argumentos parecidos a los infinitesimales, aunque no son propiamente ellos, las ideas eran cercanas. En seguida revisamos a René Descartes, quien estaba sumamente interesado en poder calcular las tangentes de las curvas, pero el método que utilizaba era considerando a la tangente desde un punto de vista global, o que la recta tangente a la curva la toca en un solo punto dejando de lado a la curva. En el caso de Isaac Barrow consideramos que él se encuentra en una etapa de transición entre ideas de tipo estático e ideas de tipo variacional, encontró una relación existente entre la tangente y el área bajo la curva a pesar de eso seguía conservando la idea de que la tangente tocaba a la curva en un solo punto. Para todos los personajes mencionados con anterioridad era muy importante la Geometría, las explicaciones y argumentos que mostraban tenían un carácter geométrico y se auxiliaban de representaciones gráficas como apoyos visuales para dar sus explicaciones.

Con respecto a Newton y Leibniz concebimos a esta etapa como el nacimiento formal del Cálculo, gracias a este se pueden resolver un conjunto de problemas con un solo método. Existían en el ambiente académico una serie de problemas como es el de las tangentes, máximos y mínimos, áreas bajo la curva entre otros, pero había diversos métodos particulares de resolución, el Cálculo naciente se convierte en un método general con el cual se pueden resolver todo ese conjunto de problemas. La tangente a una curva adquiere un carácter variacional, esto no es propiamente explicitado en esta etapa, pero se deduce fácilmente por los argumentos utilizados para calcularla, en aquel momento existe como producto de las vivencias de la gente una práctica social, la predicción, ésta propicia que emerjan objetos matemáticos en los diferentes ambientes que hay en la sociedad, en nuestro caso estamos hablando de un ambiente erudito, la predicción de un estado vecino según enuncia Cantoral (2000) requiere que se conozcan características de un estado actual, es necesario saber cuanto vale la función en el estado actual, así como cuánto cambia y cuánto cambia el cambio y así sucesivamente. Con este conocimiento se puede predecir un estado futuro, el cuanto cambia una variable con respecto a otra en un instante determinado es una información que proporciona la recta tangente ya que recordemos que ésta y la curva son una misma cosa en un instante dado, con base a esto establecemos que en el estudio de la recta tangente, la noción de tangente variable emerge de una práctica social; Newton y Leibniz siguen utilizando argumentos geométricos así como apoyos visuales en sus demostraciones.

Con respecto a la obra cuyo objetivo es la difusión del saber entre ambientes no eruditos tenemos a la obra de L´Hospital y la de Agnesi, estas obras tienen una intencionalidad didáctica. Esto se puede observar por la forma en que son expuestas, en ambos casos se hace uso de varias formas de presentar un mismo conocimiento, para garantizar el que sea entendido por sus lectores, existe una transposición didáctica con respecto al conocimiento que les dio origen ya que la forma en que se presentan es diferente al de las obras eruditas, pueden existir contribuciones originales como es el caso del teorema de L´Hospital, la tangente es vista también en ellas, así como su uso para la obtención de máximos y mínimos, queremos destacar que en la obra de L´Hospital se presenta a la tangente diciendo que al estar una curva compuesta por pequeños segmentos infinitesimales y sí se prolonga uno de estos segmentos en ambos sentidos, este pequeño lado así prolongado le vamos a llamar la tangente de la curva, vemos que aquí se nos presenta de forma natural el concepto de tangente dinámica.

Si consideramos ahora una etapa posterior a la formulación formal del Cálculo, en esta etapa revisamos el manejo que le dieron algunos matemáticos que por su trascendencia consideramos importante analizar el uso que le dieron a la tangente, entre ellos están: Euler, Lagrange y Cauchy. Al situarnos en una época posterior a la de Newton y Leibniz es necesario recordar que si bien el Cálculo en sus inicios había nacido con un carácter geométrico, ahora tales argumentos “estorbaban”, por así decirlo, para seguir desarrollándolo, en aquel entonces el Cálculo naciente aún no estaba cimentado sobre bases firmes y se requería un mayor grado de formalización para poder establecer esas bases. Con Euler podemos ver un alejamiento de los argumentos geométricos y las explicaciones auxiliadas por gráficas, aunque en el caso que revisamos se ve que no hay una separación total, ya que todavía se conservan explicaciones de tipo geométrico y no se descarta por completo el uso de las gráficas. Euler representa algebraicamente una expresión en donde hay términos que representan los cambios y nos muestra su método para obtener la tangente y menciona de manera explícita el carácter variacional de la recta tangente a la curva.

Al examinar el tratamiento que le da a la tangente Lagrange, notamos que no la menciona en su discurso, aunque al revisar sus desarrollos algebraicos vemos que la tangente se encuentra presente. Con Lagrange podemos constatar que él propone poder encontrar en una función un estado vecino dado que se conoce un estado actual, argumenta que una función se puede desarrollar por una serie de Taylor en donde se encuentran involucradas las derivadas sucesivas de la función, considera a la derivada como una función y omite en su discurso el uso de los infinitesimales, se nota con él un alejamiento de los argumentos geométricos y del auxilio de las gráficas en sus explicaciones. Finalmente analizamos la forma en como Cauchy trabaja con la tangente dinámica, ahora en su discurso Cauchy utiliza nociones como continuidad y límite, él ya no menciona en su discurso a los infinitesimales, pues ahora habla de incrementos infinitamente pequeños, tampoco menciona a la tangente dinámica, pero está presente en sus argumentaciones matemáticas, notamos que la tangente ya no se menciona, el objeto matemático importante es la derivada y con esto parece se pierde la importancia de enunciar explícitamente a la tangente.

Por último revisamos un texto escolar vigente pero que fue editado por primera vez en 1904, el libro revisado es el de Granville (2000) y se decidió revisarlo ya que sigue siendo de uso entre los profesores pero además nos muestra en la parte que analizamos su gran semejanza en el manejo de los argumentos con respecto a la obra de Cauchy. Al comparar donde Cauchy determina la inclinación de una curva en un punto dado y la interpretación geométrica de la derivada en Granville encontramos muchas semejanzas, incluso en el lenguaje, en la obra de Cauchy se menciona la palabra curva en esa parte de su libro y Granville retoma ese lenguaje a pesar de que el lenguaje manejado en la época en que lo escribe ya es el de las funciones, existe transposición didáctica, puesto que ahora va explicando diferentes formas de interpretar la derivada, se emplean nuevamente imágenes y se integran los contenidos por capítulos y secciones, tal forma de distribución corresponde a la de los programas oficiales de la materia de Cálculo Diferencial e integral, el modelo gráfico en donde se explica como el límite de una familia de secantes se convierte en una tangente es usado en otros textos contemporáneos y es el que se ha demostrado según investigaciones realizados provoca dificultad entre los estudiantes para comprender el concepto de derivada.

Capítulo 1

Antecedentes de la Investigación

Capítulo I

Antecedentes de la Investigación

Diversas investigaciones han mostrado que en nuestros sistemas escolares se ha privilegiado el uso de la algoritmia y desarrollos algebraicos en la implementación de las clases de Cálculo en particular y de las asignaturas de matemáticas en general, por lo tanto los estudiantes carecen de estrategias que les permitan dar significado a la idea de variación, de ahí que la enseñanza del Cálculo *"no suele plantear a el estudiante demasiados escenarios para la significación de la variación, ya sea al nivel local o global"* (Cantoral, R. y Resendiz, E., 2003).

El Lenguaje y Pensamiento Variacional es una línea de investigación la cual se encuentra situada bajo el seno de la aproximación socioepistemológica, que estudia los fenómenos variacionales en un ambiente didáctico; es decir asume como objeto de estudio los procesos cognitivos del que aprende, por otro lado considera el aspecto matemático y epistemológico del conocimiento, así como los procesos socioculturales de donde nacen los ideas matemáticas variacionales, tal como se plantea en Cantoral (2000).

Se pone especial atención en los procesos cognitivos y culturales, por medio de los cuales las personas comparten ideas de variación y cambio; se puede decir que tiene una orientación múltiple, puesto que estudia, las estructuras variacionales y fenomenológicas de los conceptos matemáticos asociados a los conceptos variacionales, también se encarga de estudiar el desarrollo de las estructuras cognitivas que tienen cabida en el ser humano al estudiar ideas variacionales, así como también tiene en cuenta los problemas que se resuelven en el ámbito social (Cantoral y Resendiz, 2003)

Reconocemos a partir de las investigaciones en esta línea, que la predicción es un elemento importante situado en el ambiente sociocultural en los inicios del Cálculo, pero también forma parte importante de nuestra cultural. Los seres humanos necesitamos saber que ocurrirá en un tiempo posterior, es decir necesitamos predecir un estado futuro, esta idea también estaba presente en el ambiente sociocultural en donde se encontraba Newton, en esa época emerge un programa de tipo científico el cual pretende predecir, anticipar y modelar fenómenos con la ayuda de las matemáticas, tal como lo plantea Cantoral (2000). Sin embargo y a pesar de que ha transcurrido mucho tiempo desde entonces hasta nuestros días, la predicción es algo que en la actualidad sigue siendo del interés de la sociedad, ya que su importancia es relevante, existen un sin número de casos en diferentes ramas del conocimiento en donde la predicción juega un papel trascendente, la tecnología también hace uso de la noción de predicción, por ejemplo, existen variados sistemas de control utilizados en la industria que están basados en la idea de predicción; máquinas o sistemas que tienen como entrada alguna o algunas variables físicas y requieren tener a la salida una determinada señal (variable física) con características específicas, estos sistemas pueden "cuantificar" la salida (se hace una medición interna con un sensor) y con base a este dato mediante un mecanismo de retroalimentación y una acción de control se obtiene la señal deseada, la idea de predicción se encuentra presente ya que dependiendo de la salida medida (estado de facto) se tendrá una acción de control con determinadas características ya que como dice Cantoral (2000) *el cambio posee herencia; con esto queremos decir que el estado ulterior del fenómeno de variación depende completamente de las circunstancias que caracterizan al estado de facto*, por lo tanto al conocer el estado actual de la salida se puede predecir el estado futuro el cual se compara con la salida deseada y se ejerce la acción de control necesaria que emitirá la salida óptima del sistema.

En este contexto, la derivada es un instrumento que nos permite conocer cómo es que cambia y cuánto cambia una variable con respecto a otra, aspecto esencial en la predicción, sin embargo la enseñanza tradicional ha perdido esta forma de ver a la derivada, para sustituirla por aprender a derivar sin saber que es la derivada.

Dificultades en el estudio del Cálculo

Las investigaciones realizadas por matemáticos educativos como son: Barrera (2005); Marcolini y Perales (2005), Cantoral (2000) han demostrado la gran dificultad que ha traído consigo la enseñanza del Análisis, ya que como sabemos se inicia su estudio con la materia de Cálculo la cual se estudia en el nivel medio superior sin embargo en muchos casos se ha observado que se aborda dicho estudio privilegiando los procesos algorítmicos y algebraicos o llevando acabo reformas en los programas de estudio las cuales tratan de buscar una *forma de introducirse en este campo conceptual que sea, al mismo tiempo, rica en significación y accesible.* Artigue (1998). A pesar de todo se ha encontrado que aún hay dificultades fuertes y persistentes.

En la actualidad los profesionales dedicados a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas sabemos que no basta con conocer y aplicar buenas estrategias de enseñanza ya que hay diversos factores que intervienen en el sistema didáctico, en lo particular la enseñanza del Cálculo Diferencial ha sido un problema a lo largo de la historia, tal como lo mencionan Marcolini y Perales (2005) una de las principales fallas de la educación superior.

El concepto de derivada visto en los cursos de Cálculo Diferencial es enseñado o bien como una serie de pasos a seguir o como la pendiente de la recta tangente a un punto como se menciona en González (1999):

> *Los efectos del contrato didáctico influyen directamente en la enseñanza y el aprendizaje de algoritmos para calcular derivadas, cuando se aborda la derivada generalmente se hace de tres modos diferentes:*
>
> - *Como un procedimiento algorítmico conocido con el término de regla de los cuatro pasos.*
> - *Como un proceso al límite que consiste en llevar una recta secante a una recta tangente, la cual es muy popular en los libros de texto y también muy utilizada por los docentes, pues tal parece que ellos sólo reproducen lo que ya está escrito en otra parte, o bien lo que en su momento hicieron en sus apuntes del pasado, haciendo sólo pequeñas modificaciones al respecto.*
> - *Como un proceso tendencial de llevar una velocidad promedio a una velocidad instantánea, en este caso sólo algunos libros introducen derivada como un problema relativo a la velocidad.*

Por otro lado en Castañeda (2004) se reporta que hay variadas investigaciones: Cantoral, Valero y Muñoz (2000), en donde se muestra como se privilegia los desarrollos algorítmicos, para abordar la derivada, así como en Dreyfus (1990) quien comenta que este privilegio del contexto algorítmico provoca que los estudiantes no puedan usar el conocimiento en distintas y variadas situaciones. También en Artigue (1995) dice que a los estudiantes se les puede enseñar mas o menos a mecanizar cálculos de las derivadas, sin embargo, esto no es suficiente cuando se les cuestiona sobre conceptos y métodos. Por otro lado en Rosado y Cordero (2002) también se explica que hay otros temas de Cálculo que se abordan de manera similar.

Castañeda (2004) reflexiona diciendo que se ha asumido el estudio de la derivada como el dominio de técnicas iterativas sobre expresiones algebraicas, reduciendo *su conceptualización a un proceso más que como a un objeto.*

Interpretación Geométrica en el discurso Matemático Escolar

Usualmente la interpretación geométrica que se le da a la derivada en los libros de texto de Cálculo contemporáneos sólo es utilizada para su demostración sin que posteriormente vuelva a ser usada nuevamente, cabe mencionar esto ya que se han llevado acabo investigaciones, por ejemplo en González (1999) se menciona a García (1998) en donde dice *"Los estudiantes de Vocacional no están familiarizados con la derivada como pendiente de la recta tangente"* también se dice que aunque se le defina a la pendiente como un proceso de aproximación de una secante a la de una tangente, este significado no queda bien aprendido entre los estudiantes, ya que después de un tiempo se pierde. Por otro lado también se ha visto que cuando a los alumnos se les pregunta por el signo que tiene la derivada en un punto específico(el cual sabemos esta dado por la pendiente de la recta tangente en dicho punto), los alumnos muestran dificultad para identificar el signo que tiene la derivada en algún punto, tal como es reportado en Dolores y Guerrero (2002) posteriormente se da a los estudiantes una serie de reglas a seguir con el objetivo de aprender a derivar sin que esto necesariamente implique que entiendan que es la derivada. Se ha observado, por lo tanto, que la enseñanza tradicional da una alta prioridad a los desarrollos algebraicos y a la algoritmia, sin embargo, para tener un significado más claro del concepto, se deben tratar otros aspecto, tal como es reportado en González (1999) como por ejemplo: los aspectos de tipo variacionales que están presentes en la noción de derivada, tampoco se caracterizan cambios más allá del orden dos (ni en el aspecto físico ni el geométrico), se entiende lo que es el cociente pero no se reconoce la idea de razón de cambio instantánea, evidentemente tampoco queda claramente entendida la idea de dirección de una curva[1] como se menciona en Artigue (1998) en donde se encuentra implícita la idea de tangente dinámica. Todo lo anterior implica que cuando los alumnos se enfrentan a problemas en donde se encuentra involucrada la derivada no reconocen que en ella está presente el concepto de recta tangente, por lo que inferimos que no es construido el concepto de derivada íntegramente al no saber relacionar la recta tangente a un punto de una curva con la derivada evaluada en ese punto y mucho menos el poder construir la noción de función derivada a partir de una recta tangente variable.

Noción de Tangente

Como sabemos, el concepto de derivada tiene involucrado el concepto de pendiente, y la pendiente es igual a la tangente trigonométrica del ángulo de inclinación de una recta, por lo tanto el concepto de pendiente y tangente del ángulo de inclinación de una recta son conceptos que deben de quedar claros para abordar posteriormente el concepto de derivada. Desde nuestro punto de vista es importante que quede bien asimilados estos conceptos ya que de esta forma se tienen más elementos para abordar temas subsecuentes en donde se les utiliza, como es el caso de crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos, así como el manejo conceptual de la derivada.

Tangente Dinámica

Observamos que la pendiente puede ser vista desde diferentes puntos de vista, por ejemplo como el cociente de las diferencias, cómo la tangente del ángulo de inclinación, o como la pendiente de una recta tangente a una curva y que va cambiando para cada punto de la variable independiente (tangente variable), sin embargo no hay un vínculo que relacione a la pendiente estática (tal como es estudiada en los cursos de Geometría Analítica

[1] La *dirección* de una curva en cualquier punto se define como la dirección de la tangente a la curva en este punto. Granville (2000)

convencionales) y la pendiente variable tal como se le concibe en los cursos de Cálculo Diferencial, como lo enuncia Cantoral (2000):

> *La presentación habitual de la derivada se apoya en la concepción de que la tangente es el resultado de un proceso al límite de una familia de rectas secantes, y la explicación de ello ha sido identificada, como de una gran dificultad didáctica (Dolores, 1989). Debido a que los estudiantes conservan la idea de tangente que proporciona la matemática griega de la antigüedad clásica. Esta concepción asume que la recta es (toda ella) tangente a una curva sí la toca pero no la corta. Esta caracterización funciona adecuadamente para las cónicas, pero no para curvas como las cúbicas o muchas otras más. Esta concepción es un obstáculo cuando se quiere tratar localmente la condición de tangencia, así como la necesidad de considerar la tangente dinámicamente, y no estáticamente como en la geometría griega.*

Como hemos dicho anteriormente la idea de tangente variable a la cual de ahora en adelante le vamos a llamar tangente dinámica o tangente variable, es una idea necesaria para poder tratar localmente la idea de tangencia es decir la recta tangente a la curva en un punto toca a la misma en un solo punto (localmente) y por lo tanto puede cortar a la misma en otros puntos, la noción tangente dinámica se hace necesaria para asimilar ideas de tipo variacional por ejemplo función creciente, función decreciente, lugar donde la función no crece ni decrece (máximos y mínimos), también las inclinaciones que va teniendo la tangente dinámica en los diferentes puntos de una curva nos dan una idea de qué tan rápido está cambiando eso que está cambiando, es decir sí se observa una región de la curva en donde la pendiente dinámica es demasiado inclinada (cercana a los 90°) se entiende que la función está cambiando muy rápidamente (puede ser creciendo o decreciendo)lo cual obviamente está relacionado con el valor que tiene la derivada al ser evaluada en cada uno de los puntos de la curva. Al no quedar clara la idea de tangente dinámica resulta evidente que cuando a un estudiante se le pregunte por el signo de la primera derivada de una función (en cuya región sea creciente) y que se encuentre su gráfica en el III o IV cuadrante, con frecuencia contestan que el signo de la primera derivada es negativa, argumentando que también ahí la función es negativa por estar abajo del eje de las x, con mayor razón no podrán decir con certeza cuál es el signo de las derivadas superiores al orden uno. Al no quedar clara la idea de tangente dinámica, para el alumno no resulta claro porque el método para encontrar los puntos críticos de una función es el hacer que la primera derivada sea igual a cero y tampoco entiende por qué un poco antes de un máximo la pendiente es positiva y un poco después del mismo es negativa, caso contrario sucede con el mínimo, lo cual evidentemente tampoco se entiende, por lo tanto frecuentemente los alumnos memorizan los pasos a seguir para encontrar los máximos y mínimos de una función, pero sin entender el porqué de los mismos. Al no entenderse claramente que la tangente dinámica es cambiante y va tomando diferentes valores para cada valor de la variable independiente tampoco queda claro para los alumnos el significado de razón de cambio instantánea.

Este problema también es detectado por Artigue (1998), en donde se menciona el caso del sistema escolar francés, en donde un punto de ruptura Álgebra/Análisis es la reconstrucción que se tiene que hacer de la noción de tangente que ya tiene el estudiante, vista esta desde un punto de vista geométrico como la recta tangente a un círculo y que sólo lo toca en un solo punto, esta idea difiere a la de la de dirección común entre una curva y la pendiente de su recta tangente en un punto, la cual claramente va cambiando para cada punto de la función, esta situación parece ser transparente, puesto que no se le da ningún tratamiento didáctico, dejándole a el estudiante este trabajo, aunque lo que se ha detectado es que los estudiantes no llevan acabo este trabajo de manera personal y por lo tanto cuando salen del bachillerato los estudiantes se encuentran en una fase intermedia sin tener una concepción general del concepto de pendiente.

Por otro lado también se menciona en la tesis de Martínez (2005) lo siguiente:

En los textos de cálculo se menciona explícitamente a la recta con pendiente variable "variación de la recta tangente" al momento de estudiar los puntos de máximos y mínimos, al calcular la derivada de una función para la interpretación de las gráficas, pero no existe una liga definida en los textos de cómo ver la pendiente como número y como variable.

En los tres casos mencionados anteriormente podemos observar que efectivamente el tratamiento que se le da a la pendiente en los cursos que anteceden a la materia de Cálculo Diferencial pareciera ser que es suficiente, a pesar de eso se observa que no es así, ya que los estudiantes muestran dificultades al tratar de anclar nuevos conocimientos con los que ya tienen de sus cursos anteriores.

Manejo didáctico en los libros

El concepto de pendiente se construye en el curso de Geometría Analítica, se observa que este forma parte de sus temas a tratar, sin embargo se presenta prácticamente sólo como una fórmula, ya que con respecto a sus características sólo se menciona su signo y que puede tomar cualquier valor real, un libro muy utilizado por los profesores de Matemáticas es el de Geometría Analítica de Lehmann es un libro que se ha manejado desde hace mucho tiempo y que actualmente se sigue empleando, en nuestro caso hemos visto también otros textos de Geometría Analítica como el de Geometría Analítica Editorial Esfinge y el de Geometría Analítica Editorial UAEM (Universidad Autónoma del Estado de México), sin hacer una revisión minuciosa; desde nuestro punto de vista se puede percibir que tratan los temas de forma similar a Lehmann pero con un grado menor de dificultad. A continuación vamos a exponer como es tratado el concepto de pendiente en el libro de Geometría Analítica de Lehmann.

La pendiente de una recta se designa comúnmente por la letra m. Por tanto podemos escribir

$m = tg\alpha$ *(2)*

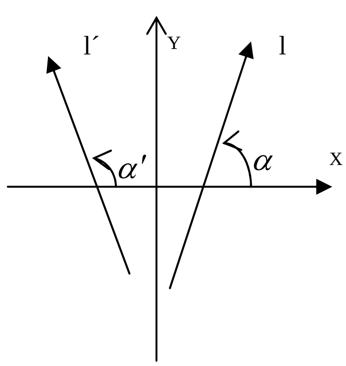


Fig. 12

Por (1) y (2) se ve que la pendiente puede tomar todos los valores reales. Si α es agudo, la pendiente es positiva como para la recta l en la figura 12; si α' es obtuso como para la recta l´, la pendiente es negativa.

En otro apartado dice:

Teorema 4. Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos diferentes cualesquiera de una recta, la pendiente de la recta es

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \quad x_1 \neq x_2$$

Posteriormente en el libro se hace una demostración al respecto, después en otros apartados se menciona la condición de paralelismo y perpendicularidad. El tema de pendiente no es vuelto a tocar, salvo para la resolución de problemas. No se habla más al respecto en este libro con relación al concepto de pendiente. Cabe mencionar también que hay una gran diferencia al abordar a la pendiente tomando en cuenta su ángulo de inclinación que al tomarla como un cociente de diferencias, puesto que en la primera con sólo mirar la gráfica y ver que tan "inclinada está" se puede decir rápidamente cual tiene mayor pendiente, sin embargo con respecto a la segunda, el estudiante tiene que entender la idea de cambio, la cual no es manejada como tal en el texto mencionado, mas bien esta idea es abordada como la distancia entre dos puntos $y_2 - y_1$ o $x_2 - x_1$, y por otro lado también el estudiante debe de comprender el resultado del cociente de esos cambios, es decir entender cuánto es lo que está cambiando la "*y*" por cada unidad de cambio de la "*x*".

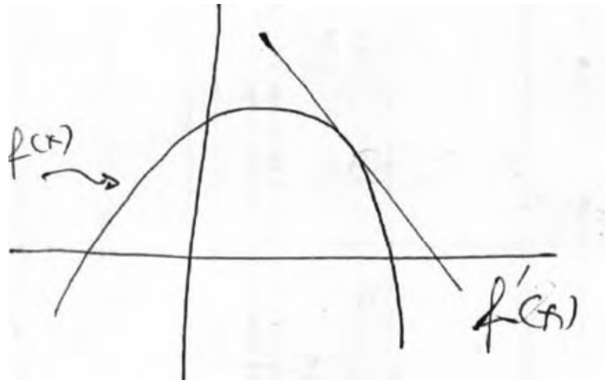
Referentes empíricos: una experiencia personal

Al consultar con estudiantes de Cálculo Diferencial en el CBT 1 de Neza (El cual es un bachillerato en donde al mismo tiempo estudian una carrera técnica), estos alumnos ya habían cursado la materia de Geometría Analítica, así como las asignaturas Física I y Física II (En donde se estudian fenómenos físicos en cuya representación matemática esta implícito el concepto de pendiente), se les presentó a los alumnos en el pizarrón la expresión: $y = \frac{1}{2}x + 1$ y se les preguntó de manera abierta que significado tiene $\frac{1}{2}$, qué quiere decir $\frac{1}{2}$ en la expresión planteada, la gran mayoría de ellos no supo responder a la pregunta, de hecho aunque se cambiara cualquier otro número real en lugar de $\frac{1}{2}$ tampoco sabían contestar. Por nuestra parte se esperaba que pudieran decir con respecto a la pregunta planteada que cada que *x* cambiara una unidad *y* cambiaría 0.5 unidades o que dijeran que **y** cambiaría la mitad de lo que cambiará *x*, es decir que dijeran cosas como "sí **x** cambia 2 unidades **y** cambia 1 unidad, sí *x* cambia 10 unidades **y** cambia 5 unidades, y además que se comentara que sí *x* aumenta *y* también lo hace, observamos sin embargo que la idea de inclinación y su relación que tienen con la pendiente está un poco mejor asimilada puesto que al mostrarles dos líneas rectas en un mismo plano y con diferente inclinación (ángulos agudos) aproximadamente el 50 % del grupo pudo identificar cual de las dos rectas tenía mayor pendiente. Se puede observar aquí de esta experiencia como la mayoría de los estudiantes no tienen claridad respecto al concepto de pendiente, y su relación con la tangente; la pendiente vista como número, como resultado de un cociente de diferencias, la pendiente vista como un número y la relación que tiene esta con la tangente.

Desde nuestro punto de vista el elemento esencial que nos muestra la idea de cambio, sin embargo no es trabajado como tal en el discurso matemático escolar en la asignatura de Geometría Analítica, aunque como se sabe, no es propiamente su objetivo.

En Castañeda (2004) se muestran los resultados obtenidos a través de una breve consulta que se hace a un grupo de profesores de matemáticas en donde se les plantea:

> *¿Qué es la derivada?* A lo cual uno de ellos responde *Es la recta tangente a un punto y hace un dibujo como el que se muestra a continuación:*



Se puede observar que la interpretación de derivada está asociada con la recta tangente a un punto.

De lo anterior podemos observar que inclusive hay profesores que no tienen bien asimilado el concepto de que la pendiente de la recta tangente a un punto de la curva va cambiando con respecto a cada punto de la función, inferimos que al no concebir a la pendiente como algo variable (pendiente dinámica) y conservar la idea de la matemática griega de una tangente estática, esta idea obstaculiza entender que la derivada evaluada en cada punto de la curva es cambiante (claro esta a excepción de las líneas rectas) y el ejemplo enunciado nos lo muestra, si acaso fuera cierto la afirmación hecha por el profesor entonces se podría decir que la derivada tiene pendiente que no cambia, lo cual para el caso mostrado no es cierto, además también que la derivada es decreciente siempre, lo cual tampoco es cierto en todo momento, por otro lado también se podría decir tal como lo enuncia Castañeda (2004) "*De hecho la recta no podría ser la derivada de la curva, de serlo así, tendría su raíz en el lugar en que la curva alcanza el máximo*" Lo cual como vemos tampoco es cierto.

Manejos conceptuales

La misma definición de derivada tiene implícita a la tangente del ángulo de inclinación que es la pendiente de la recta tangente a la curva (función) en su definición matemática la cual es:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad \text{donde:} \quad m = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

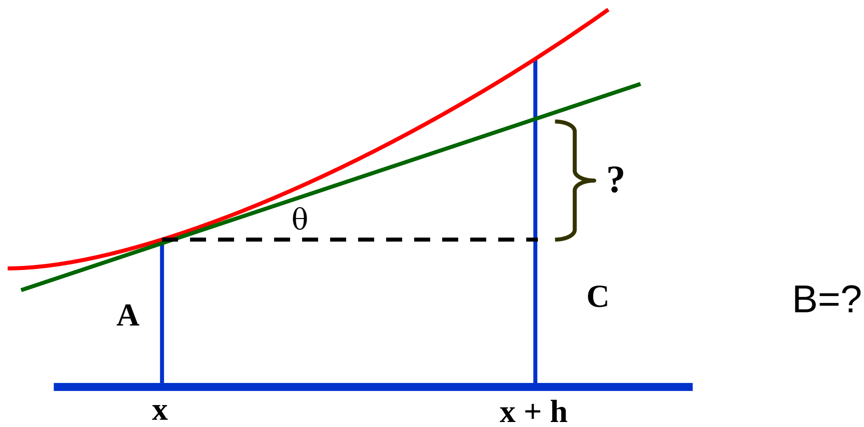
De esta expresión se puede observar que está involucrado el concepto de pendiente como una razón de cambio y nos puede dar información de cuánto se esta cambiando y que tan rápido se esta cambiando tal como se menciona en Barrera (2002) en la cual se reporta:

> *Autores como Dolores (Dolores, 1999) concluye que los cambios relativos se miden por medio de razones o cocientes entre cambios. Ésta es una de las ideas más importantes del cálculo diferencial, pues siempre que se estudia un fenómeno de variación lo importante no es sólo determinar los cambios, sino determinar que tan rápido cambia eso que cambia, y la mejor forma de averiguarlo es por medio de las razones entre los cambios.*

En Cantoral (2000) se menciona que cuando se le presenta a un alumno un polinomio del tipo de orden 5 o 7 situado gráficamente en un plano y se le hacen preguntas con respecto a donde $f(x) > 0, f'(x) > 0, f''(x) > 0, f'''(x) > 0$ se requieren estrategias de tipo variacional para resolver este tipo de problemas, en donde se puede utilizar la pendiente de la recta tangente y observar como esta cambia para contestar lo que se pide, se dice que un manejo desde el punto de vista variacional, permite contestar las cuestiones anteriores, sin embargo, las respuestas que se han obtenido en ese sentido es que muchos estudiantes no saben contestar correctamente y sobre todo cuando se hace el cuestionamiento sobre cuando la tercera derivada es mayor que cero en donde necesariamente el alumno tiene que manejar aspectos variacionales. Ejemplos similares también son reportados en Dolores y Guerrero (2004).

En Cantoral (2000) en donde también se expone que en la época de Newton el conocimiento desarrollado en ese tiempo estaba influenciado por las ideas de predicción, que actualmente seguimos utilizando, de hecho es una forma en como podemos llevar este conocimiento a un contexto escolar, la idea de tangente se utiliza en la predicción tal como lo reporta Cordero[2]:

[2] Información otorgada por el ponente en el Diplomado *DESARROLLO DEL PENSAMIENTO MATEMATICO*, que se llevo a cabo en Cd. Nezahualcóyotl del 29 de enero al 19 de Junio de 2004.



$tg\theta = \frac{?}{h}$ $\qquad$ $C = A + tg\theta h$

$C = A + B$

$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)h$

En la gráfica se muestra una aproximación gráfica de la serie de Taylor:

$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_o)h^2/2! + ...$

En donde el concepto de predicción es fundamental. "*Esto es, sí conocemos el estado inicial de la magnitud a estudiar, es decir, sí se conoce la ordenada y sus variaciones sucesivas, es posible predecir el comportamiento del estado vecino***…" (**Cantoral, 1995)

Por otro lado Dolores (2002) muestra como existe una desvinculación entre los temas que se ven en física y los de Cálculo, siendo que en su origen estuvieron estrechamente relacionados.

Comentarios finales del capítulo

Cuando los alumnos cursan la materia de Cálculo Diferencial, manejan conceptos en donde interviene la idea de tangente dinámica, con respecto a una función: crecimiento, decrecimiento, derivada, máximos y mínimos y su interpretación gráfica, por lo tanto se requiere entender a la tangente como algo cambiante (tangente variable) ya que esta concepción les sirve también para conocer la dirección de una curva, así como el saber cuánto cambia, eso que está cambiando. Sin embargo la idea de tangente que tienen los alumnos, proveniente de sus cursos anteriores, que es la de una pendiente como número (constante), la cual de por sí es una idea que no esta bien asimilada ya que sí bien, según lo que se dijo anteriormente algunos alumnos saben identificar en el caso de varias líneas rectas trazadas en un plano cartesiano (con ángulos de inclinación agudos) cual tiene mayor pendiente, casi nadie puede explicar que significado tiene el valor de m en una expresión del tipo $y = mx + b$. Por otro lado una vez que se puede concebir a la pendiente como número, como una razón de cambio, ahora debería de existir un vínculo entre la idea de pendiente como número, que como mencionamos la pendiente es igual a la tangente del ángulo de inclinación, y la idea de tangente dinámica, esta idea no es manejada en el discurso matemático escolar actual. Pareciera ser que por tratarse de una idea tan simple no es esclarecida explícitamente en ningún lugar, es como un trabajo intelectual que por su simplicidad se le deja al estudiante por hacer, no obstante algunos de los resultados reportados anteriormente con respecto a las dificultades en los estudiantes en el entendimiento del Cálculo nos muestran que los estudiantes no realizan tal trabajo, por lo tanto decimos que al no quedar claro el concepto de pendiente como número (razón de cambio constante) y tampoco existir un vínculo entre la pendiente como número y la pendiente dinámica (tangente dinámica), esto imposibilita la adquisición de un lenguaje gráfico de la derivada, de función creciente y decreciente, de los máximos y mínimos, por lo que dado lo anterior y puesto que el concepto de tangente dinámica es usado en Cálculo, los conocimientos que se adquieren resultan frágiles ya que no se apoyan con las ideas adecuadas que los ayuden a anclar los nuevos conocimientos.

Capítulo II

Problema de Investigación

Capítulo II

Problemática

El Cálculo Diferencial es una de las asignaturas que se cursan en el sistema medio superior,…*las temáticas que se abordan son posteriores al álgebra básica; digamos que suelen tratar con temas que van del análisis en adelante* (Cantoral, 2000), en el Cálculo Diferencial se han reportado grandes dificultades en el estudio del Cálculo, (Marcolini & Perales, 2005). La línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV) aborda el estudio del Cálculo con la perspectiva de la matemática de la variación y el cambio, además considera el desarrollo de las funciones cognitivas propias de los seres humanos cuando se abordan conceptos y propiedades matemáticos del cambio y la variación, también considera el ámbito sociocultural al resolver problemas en donde están involucradas estructuras variacionales.

El concepto de recta tangente es visto en Geometría Euclidiana y se refiere a la recta que toca a la curva en un solo punto y no la vuelva a tocar en ningún otro, dejando a la curva a un lado de la recta, esta visión global es como la manejada en matemática griega de la antigüedad clásica (Cantoral, 2000), posteriormente en la materia de Geometría Analítica se estudia el tema de tangente del ángulo de inclinación sin darle prácticamente importancia ya que se le relaciona con la pendiente, puesto que como sabemos $m = tg\alpha$ siendo α el ángulo de inclinación de la recta, en donde el ángulo de inclinación de una recta es el formado por la parte derecha del eje x y la recta, cuando ésta se considera dirigida hacia arriba, de tal manera que lo realmente se utiliza más frecuentemente en Geometría Analítica es el número asociado a la tangente, es decir a la pendiente, aunque en el curso regularmente no se le relaciona con argumentos de tipo variacional. Posteriormente en la materia de Cálculo Diferencial, se vuelve a retomar el tema de tangente pero ahora de una forma diferente, ya que se dice que el valor de la derivada en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función (puede decir curva o gráfica según el autor) en ese punto, pero como sabemos para una función diferente a la línea recta el valor de la derivada es diferente para cada punto, consecuentemente tenemos una pendiente variable lo cual implica tener también tener una tangente dinámica (variable), nuestro trabajo de investigación aborda esta tangente dinámica, por lo tanto aunque en algunas ocasiones estemos hablando de la pendiente, debemos tener presente la relación que guarda con la tangente, por lo cual al decir pendiente dinámica y como sabemos que $m = tg\alpha$, entonces aunque no lo mencionemos estamos queriendo decir que la tangente asociada también es dinámica y de manera similar si decimos pendiente estática nos estamos refiriendo también a la tangente estática.

Desde el plano gráfico, en la construcción de la noción de derivada es importante que el alumno le de un significado a la pendiente como una razón de cambio, que sepa reconocerla en expresiones del tipo $y = mx + b$, pero además ante preguntas como: "¿que significa $m = a$?" en donde $a \in R$, pueda reconocer el significado si se trata de una pendiente positiva o negativa cuyo ángulo de inclinación puede ser agudo u obtuso, y si corresponde a una función creciente o decreciente, así como también que pueda argumentar, que por cada unidad de cambio de la variable independiente hay un cambio de "*a*" unidades de la variable dependiente. Como sabemos la derivada de una función puede ser interpretada como una razón de cambio instantánea, en donde al analizar la función localmente, para un instante dado, al evaluar la derivada de la función en un punto *P*, le corresponde la pendiente de la recta tangente en ese punto *P*. Al tratar con una función se hace necesario entender que al evaluar el valor de la derivada en cada punto de la misma (pendiente de la recta tangente a un punto *P*) va a ir cambiando (a excepción de las funciones lineales) por lo tanto se requiere concebir la idea de tangente dinámica o tangente variable. De acuerdo a nuestros antecedentes de investigación sostenemos que no hay un vínculo o conexión entre la idea de pendiente (tangente estática) vista como un número tal y como es estudiada en cursos previos al de Cálculo Diferencial y la pendiente dinámica (tangente dinámica). A continuación citamos tres fuentes en donde se detecta dicha problemática.

En Artigue (1998) se le menciona a la noción de tangente como otra dimensión entre la ruptura Álgebra/Análisis en donde se menciona que es un caso prototípico en donde el estudiante tiene que reconstruir objetos matemático familiares, pero en otros contextos, ya que en la enseñanza del bachillerato los alumnos encuentran primero a la tangente como un objeto geométrico con propiedades específicas:

- *No corta al círculo*
- *Lo toca en un solo punto*
- *En el punto de contacto es perpendicular al radio*

También se menciona que no hay una filiación directa entre esta tangente y la vista en Análisis caracterizada por una propiedad local. Concluye diciendo que el sistema escolar francés no es sensible a esta problemática dejándoles a los estudiantes este trabajo intelectual de reorganización de las concepciones, pero que se ha comprobado que cuando los estudiantes terminan su bachillerato se encuentran en una fase intermedia, sin tener una concepción de la tangente globalmente coherente.

En Cantoral (2000) se menciona que la derivada es presentada en el ámbito escolar como una medida de la inclinación de la recta tangente a una curva, sin embargo esta explicación presupone que la concepción que los alumnos tienen de pendiente, de sus cursos anteriores haya adquirido una cierta estabilidad funcional.

Finalmente en Martínez (2005) en donde se hace un análisis del concepto de pendiente en textos de Cálculo se menciona que no existe un vínculo definido entre la pendiente vista como número (tangente estática) y la pendiente variable (tangente variable) la cual es requerida para poder conceptualizar ideas como máximos y mínimos, así como derivadas entre otros.

"Todo el cálculo diferencial se puede reducir a su concepto fundamental, la razón de cambio" (Wenzelburger, 1993) Podemos decir que el más elemental de los fenómenos de cambio en donde están involucradas dos variables es aquel que está representado por una expresión del tipo: $y = mx + b$, esta expresión nos indica como están relacionadas las dos variables, y es precisamente en la materia de Geometría Analítica en donde se estudia relaciones de este tipo, sin embargo se ha observado que el concepto de pendiente es tratado como una fórmula, regularmente no se le explica a los alumnos cual es el significado de la pendiente, los alumnos frecuentemente no saben responder a preguntas como "¿Qué significa $m = 3$? Por citar algún ejemplo, regularmente en este curso no se le habla a los alumnos acerca de cuanto cambia la variable dependiente por cada unidad de

cambio de la variable independiente, de hecho prácticamente el alumno sólo se le menciona cuando una pendiente es positiva, cuando es negativa, la condición de perpendicularidad y paralelismo y todo esto es utilizado para la resolución de problemas más complejos en donde el valor de la pendiente es simplemente un dato más a usarse. La pendiente vista como un número, como un cociente de diferencias no tiene un significado desde el punto de vista de la matemática de los cambios, ya que en este curso no se hacen explícitas ideas como por ejemplo "dada una expresión: $y = -2x + 4$ si la variable independiente ha cambiado 5 unidades ¿Cuántas unidades habrá cambiado la variable dependiente?"y ¿cómo es este cambio?

En el curso de Cálculo Diferencial se le da un tratamiento diferente a la pendiente ya que se le trata como una tangente variable, sin embargo no existe una conexión entre el concepto de pendiente estática visto en cursos anteriores a la materia de Cálculo y la pendiente variable vista en el curso de Cálculo, pareciera ser que los profesores suponemos que este trabajo intelectual lo tienen que hacer los alumnos o hasta se da por hecho que es algo que el alumno comprende sin ninguna dificultad, lo que se observa sin embargo es que cuando los alumnos se encuentran en el nivel universitario carecen de los elementos de Cálculo, ya que como se comenta en Navarro (2004) en donde se enuncia a Dolores (1996) *"en el primer año de la universidad el curso de cálculo se vuelve a repetir casi en los mismos términos como se proyectó en el bachillerato, a pesar de que el nivel superior pretende ampliar y profundizar sobre este tema"*

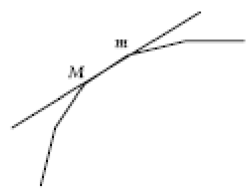
En nuestro caso como docente en la asignatura de Cálculo Diferencial, hemos podido observar que los alumnos que inician cursando la materia de Cálculo Diferencial no entienden a la pendiente como una razón de cambio ya que como citamos en los antecedentes de investigación, cuando se les hace preguntas acerca del significado que tiene un determinado valor de *m* (pendiente) en una función lineal, no saben responder al respecto, posteriormente la forma tradicional de presentar al alumno la interpretación geométrica de la derivada es como un proceso al límite de una familia de rectas secantes, cuyo límite es la recta tangente a un punto de la curva. Esta interpretación se encuentra presente en varios libros de texto, sin embargo no se hace explícito a los alumnos que este valor de la pendiente de la recta tangente a la curva es cambiante; después de que es vista la interpretación geométrica en los libros de texto, regularmente se ven las fórmulas para derivar expresiones algebraicas, derivadas de funciones trigonométricas directas e inversas, así como las derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas, en donde prácticamente los alumnos aprenden a derivar casi exclusivamente a partir de la aplicación de fórmulas y desarrollos algebraicos. Posteriormente en el curso de Cálculo se ven aplicaciones de las derivadas, también y hasta ese momento de la enseñanza de los alumnos se les menciona que puede haber regiones donde la curva es creciente y por lo tanto la derivada es positiva y otras regiones donde la función es decreciente y por lo tanto la derivada es negativa, así como que en los puntos críticos la pendiente vale cero, sin embargo sí se quiere determinar sí se trata de un máximo o mínimo solo tienen que ver ***cómo cambia*** el valor de la pendiente, se da por sentado que a el alumno le queda claro todo lo anterior, cuando en realidad existen reportes de investigación como los de (Cantoral, 2000; Dolores y Guerrero, 2004) que nos muestran las dificultades que tienen los estudiantes en poder determinar el signo de la derivada de una función, así como dificultades en el entendimiento del Cálculo. A nuestro parecer este "salto" existente entre la concepción que tienen los estudiantes de lo que es la pendiente vista en su curso de Geometría Analítica y la forma en como se le ve en Cálculo ocasiona dificultades en el aprendizaje del concepto de derivada, función creciente, función decreciente, así como en los conceptos de máximos y mínimos, nosotros estamos de acuerdo con la cita de Cantoral (2000) *"Cada concepto avanzado que se desea enseñar, suele apoyarse en concepciones más elementales y se resiste a el aprendizaje si no se antecede por un sólido entendimiento de los conceptos previos"* de tal forma que asumimos que un problema en el aprendizaje de los conceptos del Cálculo mencionados anteriormente es ocasionado por que no hay un vínculo o conexión directa en el discurso matemático escolar entre la tangente vista como número y la tangente dinámica, por lo tanto las nociones en donde interviene el concepto de pendiente (tangente), devienen frágiles al no tener un sustento sólido donde anclarse.

Hubo momentos en la historia del Cálculo en donde se le daba especial importancia a el uso de las tangentes, por ejemplo en Castañeda (2004) se realiza el análisis epistemológico a la obra *Analyse des infiniment petits* del Marqués de L´Hospital, publicado en 1696, existe una sección en donde nos muestra una interpretación geométrica de la tangente, en ella podemos percibir el carácter variacional que se le atribuía a la tangente.

Este Segundo postulado, referido a la naturaleza de las curvas, expresa el papel constructivo que desempeñó la intuición geométrica dentro de la obra de L'Hospital, de hecho, este argumento permite «mostrar», a través de un modelo geométrico, una posible interpretación de lo que significa una cantidad infinitamente pequeña, además de explicar la forma en cómo se relaciona un punto en la curva respecto a su tangente.

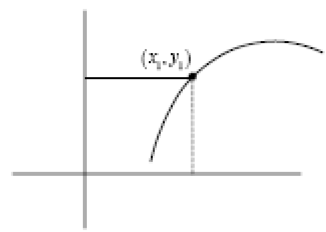
Definición

Si se prolonga uno de los pequeños lados Mn de la poligonal que compone a una línea curva, este pequeño lado, así prolongado, será llamado la «tangente» de la curva en el punto M o m.

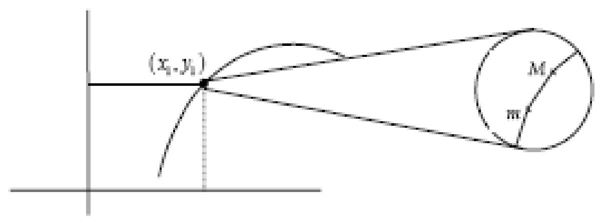


(L'Hospital, 1696)

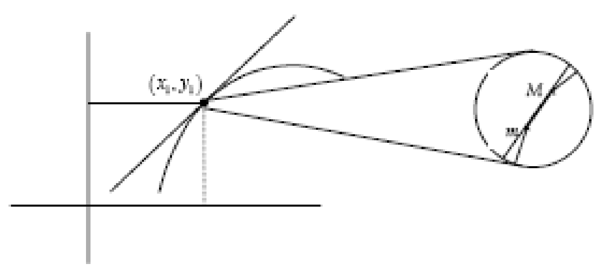
De esta forma, un punto (x, y) no correspondería a un lugar en el plano, sino a un segmento infinitamente pequeño. Valiéndonos del Postulado I, los lugares geométricos de los extremos de este segmento infinitesimal serían considerados indistintamente como el mismo. Por ejemplo, consideremos el caso de una función f (x), cuyo punto (x_1, y_1) *se exhibe en la siguiente gráfica.*



Este punto, dada la naturaleza poligonal de la curva y bajo los argumentos presentados de L'Hospital, es posible representarlo también como un segmento Mm con una dimensión infinitamente pequeña.



Esta explicación muestra a la recta tangente de una forma natural; dado que una curva está compuesta por un número infinito de lados, basta entonces con prolongar el segmento infinitesimal en ambas direcciones para que se obtenga la recta tangente.



Se deduce de este argumento que una curva y su recta tangente son indistinguibles en una vecindad infinitesimal, pues ambas tienen la misma naturaleza poligonal.

Al revisar lo anteriormente expuesto, se distingue el carácter variacional que se le atribuía a la tangente de una curva ya que al estar considerada como una poligonal compuesta por infinitos segmentos infinitesimales, cada uno de ellos obviamente con distinta inclinación, y consecuentemente se dice que cuando se extiende el segmento infinitesimal en ambos lados se obtiene la recta tangente a la curva, de tal forma que la recta tangente y la curva son lo mismo en una vecindad infinitesimal. Podemos por lo tanto deducir de esta definición que también hay infinitas tangentes, ya que la recta tangente está cambiando a cada momento, puesto que en cada instante hay un nuevo segmento infinitesimal de la curva.

En Cantoral y Farfán (2004) se cita el método para trazar tangentes de Fermat el cual dice:

> *Sea la curva OPP´ (véase la figura 4.11). La recta PT es tangente a la curva en el punto P. El punto T es la intersección de la recta tangente con el eje de las abscisas.*
>
> *Llamamos subtangente al segmento TQ. Por lo tanto, hallar la recta tangente es equivalente a hallar la subtangente TQ. Por la manera en que esta construida la figura, los triángulos TPQ y PSR son semejantes, y se satisfacen las siguientes relaciones entre sus lados:*
>
> $$\frac{QT}{PR} = \frac{PQ}{SR}$$
>
> *Y, por lo tanto,*
>
> $$TQ = \frac{PR \bullet PQ}{SR}$$
>
> *como* $PR = QQ' = \varepsilon$. *Si* ε es pequeño se tiene que
>
> $$SR \approx P'R$$
>
> pero,
>
> $$P'R = P'Q' - RQ' = P'Q' - PQ$$
>
> *Entonces,*
>
> $$TQ \approx \frac{\varepsilon PQ}{P'Q' - PQ}$$
>
> *Finalmente la igualdad se obtendrá cuando* $\varepsilon = 0$*, aunque Fermat nunca dice que* ε *se aproxime a cero, o se haga cero, o sea igual a cero, sino sólo que el término que contenga a* ε *debe ser eliminado.*

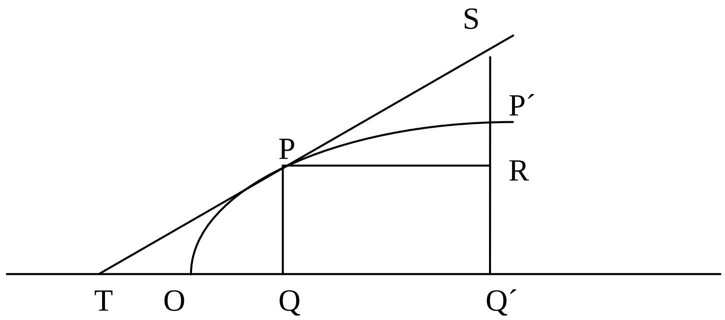


FIGURA 4.11

Al analizar lo anterior vemos que Fermat comenzaba a utilizar argumentos de tipo variacional, aunque esto no se hace explícito en su discurso, sin embargo al observar la figura podemos ver que el triángulo *PRS* se va a ir haciendo cada vez más y más pequeño, por otro lado y también de la figura se puede deducir que si el punto *P* se mueve a la izquierda o a la derecha sobre la curva, el valor de *TQ* va ir cambiando con lo cual también cambiara el valor de la tangente.

Problema de investigación

En base a lo revisado en (Martínez, 2005; Cantoral, 2000; Artigue, 1998) y comparando con algunas formas de trabajar con el concepto de tangente en épocas pasadas como las revisadas anteriormente en (Castañeda, 2004; Cantoral y Farfán, 2004) podemos aseverar que el discurso matemático escolar actual no facilita la construcción de la noción tangente variable la cual es necesaria para entender conceptos de Cálculo elementales, por lo tanto se llevará acabo una investigación documental en libros de texto antiguos para poder indagar como nace el concepto de tangente y tangente dinámica (o el equivalente en nombre para otras épocas), como vive en los diferentes momentos históricos de el Cálculo, y establecer momentos de ruptura en donde se le empieza a dar un tratamiento distinto y poder establecer aseveraciones de porque ocurre esto, así como el observar cual era el tratamiento que se le daba a la tangente dinámica en otras épocas, a su vez el indagar si la concepción de tangente utilizada en Cálculo atendía a alguna necesidad o problemática específica. Además se revisara si a la tangente dinámica se le daba algún tratamiento didáctico específico, es interesante también el poder investigar ¿cuál es el contexto sociocultural que le confirió razón de ser a la tangente dinámica? nosotros consideramos a manera de hipótesis que la tangente dinámica tuvo su razón de ser cuando el Cálculo tenía un carácter geométrico más que algebraico, esto en el siglo XVII en donde uno de los problemas tratados eran las tangentes de las curvas, posteriormente se pierde el acercamiento geométrico al Cálculo por uno más formal y riguroso, comenzando este proceso con Euler en el siglo XVIII, pasando por D´Alembert entre otros y siguiendo con Cauchy en el siglo XIX con el cual se puede decir que sus ideas prevalecen hasta la fecha en el discurso matemático escolar actual, consideramos que al establecerse los procesos a el límite y empezar a obtener fórmulas mediante las cuales se pueden obtener derivadas, se olvidan varias ideas con respecto a la derivada, entre ellas la de tangente dinámica. Consideramos que en la noción de predicción está involucrado también el concepto de tangente dinámica, como un elemento, el cual se puede utilizar para predecir un estado vecino a partir de un estado presente.

Por lo tanto con todo lo anteriormente expuesto, lo que se pretende es obtener información para, en futuras investigaciones, construir la noción de tangente dinámica en ámbito escolar a partir del análisis socioepistemológico que se realizará, se pretenden rescatar elementos que nos permitan ver el origen de tangente dinámica con lo cual podremos observar el carácter variacional de la recta tangente así como también darle un nuevo significado a la noción de tangente dinámica (tangente variable) la cual es vista en los libros de textos actuales, de tal forma que pretendemos que el producto de esta tesis posibilite la creación de secuencias de aprendizaje, en donde se construya la noción de tangente dinámica desde un punto de vista variacional con lo cual se podrían llevar acabo las últimas fases de una Ingeniería didáctica, aunque esto último ya sería otro tema de tesis.

La Ingeniería Didáctica en su fase preliminar toma en consideración tres componentes las cuales son, la componente didáctica, la componente cognitiva y la componente epistemológica, en nuestro estudio se tomará en cuenta una componente referida a la construcción social del conocimiento matemático a la cual llamamos la componente social, ésta va a afectar el estudio de las otras tres componentes parcialmente, en el caso de la epistemología no tomará en cuenta sólo la naturaleza del conocimiento como surge y se desarrolla, sino que además enfocará su atención en los contextos socioculturales en donde surge el conocimiento matemático, se verá cómo la cultura es determinante en el surgimiento del conocimiento matemático, así como las circunstancias sociales que posibilitan el surgimiento de las ideas y también la construcción de las mismas, se podrá analizar al tomar en cuenta esta componente como se agregan significados a un determinado concepto matemático así como momentos de ruptura en donde se pierden significados es importante tomar en cuenta también los usos que se le ha dado a el conocimiento matemático que se está analizando, es por tal motivo que consideramos fundamental tomar en cuenta esta componente social del conocimiento, por lo tanto la metodología de la investigación a utilizar, será una extensión de la Ingeniería Didáctica en su fase preliminar haciendo un estudio de tipo socioepistemológico, abarcando la componente sociocultural, todo esto con el fin de explicar el fenómeno didáctico enunciado anteriormente, de tal forma que se tengan elementos para resignificar el discurso matemático escolar actual, así como sentar las bases para la implementación de una situación didáctica con la cual los alumnos puedan construir un nuevo significado a el concepto de recta tangente a una curva y lo puedan construir de manera eficiente, de tal forma que puedan establecer un vínculo entre la noción de tangente estática y dinámica, construyéndola desde un punto de vista variacional logrando con esto tener elementos firmes que permitan servir de base para construir los diferentes conceptos vistos en Cálculo Diferencial en donde se utiliza el concepto de tangente variable.

Capítulo III

Marco Teórico

Capítulo III

Marco Teórico

La Matemática Educativa

La Matemática Educativa es una disciplina científica que investiga los procesos de estudios de las matemáticas en situación escolar. Se ha asumido que la unidad mínima de análisis es el sistema didáctico, el cual está conformado por los polos: el profesor, el alumno y el conocimiento; las relaciones establecidas por estos polos nos permiten hablar de un modelo de la matemática escolar, así como un modelo de la actividad matemática y un modelo del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, el enfoque que se utiliza en este modelo es sistémico y como se enuncia en Brousseau (1994 citado en Lezama, 2003), en donde se entiende que:

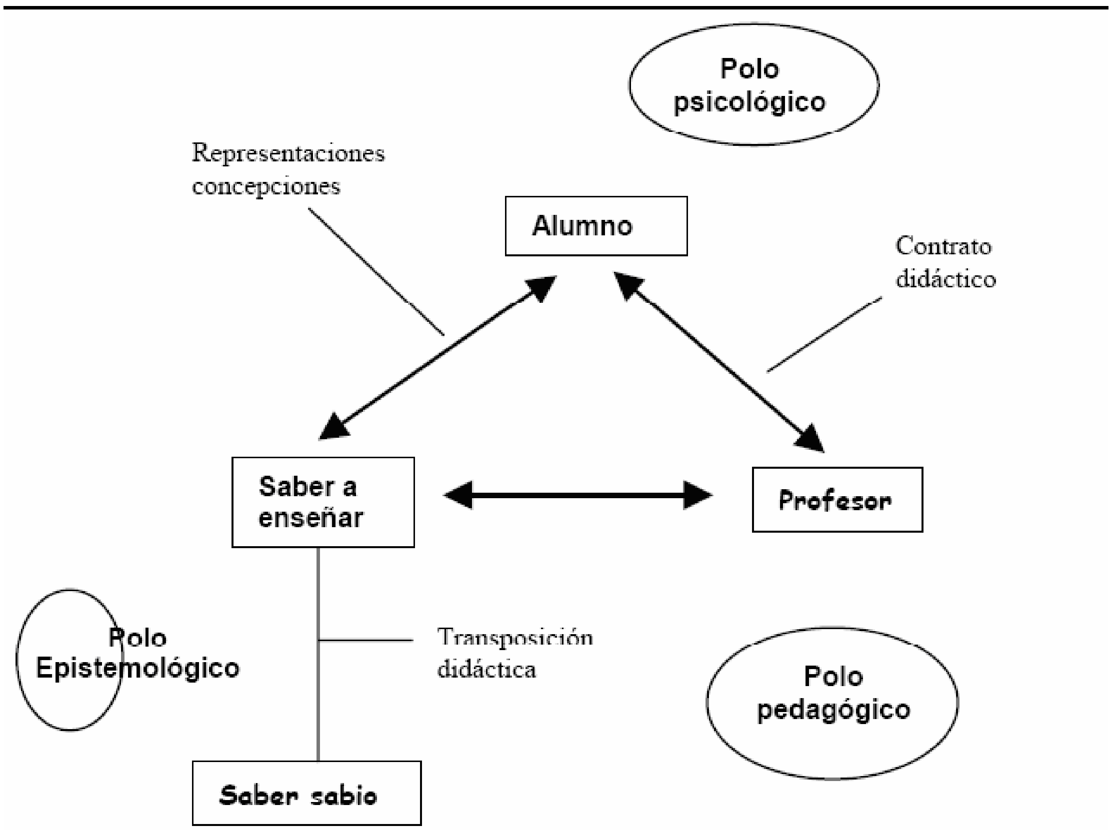
> *A la didáctica de las matemáticas como el estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos con objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto.*

La matemática educativa busca incidir de manera benéfica los sistemas escolares, lo cual no quiere decir simplemente el implementar mejores formas de enseñanza, su horizonte es mucho más amplio ya que como se enuncia en Cantoral (2005):

> *En esta época se acepta como una premisa funcional el que nuestra disciplina estudia los procesos de transmisión y adquisición de los diferentes contenidos matemáticos en situación escolar. Pues como se señala, la disciplina se propone describir y explicar los fenómenos relativos a las relaciones entre enseñanza y aprendizaje. No nos reducimos a la búsqueda de una "buena manera de enseñar" una cierta noción previamente fijada, sino que nos permitimos asumir como objeto de estudio, por ejemplo, la organización de una actividad cuya intención declarada sea el aprendizaje de un cierto saber, incluso aunque esta actividad se vea desviada de su objetivo de partida. La investigación en nuestro campo se propone afectar al sistema educativo en un sentido benéfico, a saber, mejorar los métodos y los contenidos de la enseñanza y proponer las condiciones para*

un funcionamiento estable de los sistemas didácticos asegurando entre los alumnos la construcción de un saber viviente, susceptible de evolución, y funcional, que permite resolver problemas y plantear verdaderas preguntas.

A continuación mostramos un esquema de Higueras (2000), citado en Lezama (2003) y Colín (2005) el cual nos enseña las relaciones entre los diferentes polos del sistema didáctico:



En el esquema anterior se muestra cada uno de los polos del sistema didáctico, en donde se ven los tres polos citados, y las diferentes relaciones que hay entre los componentes del sistema didáctico, de tal forma que observamos que la relación existente entre el alumno y el conocimiento se da a partir de la relación que establece el educando con respecto a el saber a enseñar, por otro lado también notamos que podemos explicar la relación entre el alumno y el profesor por medio del contrato didáctico. Existe como lo vemos en el esquema anterior también una relación entre el profesor y el saber a enseñar y finalmente observamos también que existe un vínculo entre el saber sabio que es de donde emerge el saber a enseñar aunque en este proceso de pasar del saber sabio al saber a enseñar hay cambios, productos de un fenómeno que se le conoce como la Transposición didáctica, de tal forma que todas estas relaciones que acabamos de enunciar son entornos en los que se pueden observar fenómenos, tal como lo cita Colín (2005):

- *Fenómenos ligados al contrato didáctico.*
- *Fenómenos ligados a las concepciones y representaciones de los estudiantes.*
- *Fenómenos ligados a la relación entre el Profesor y el Saber.*
- *Fenómenos ligados a la transposición didáctica.*

En nuestro caso particular lo que perseguimos es buscar elementos en el saber sabio, de donde surge el concepto de tangente dinámica observar cual son los escenarios socioculturales que le dan origen y determinar mediante un análisis socioepistemológico cuáles fueron los cambios que sufrió tal concepto por efecto de la transposición didáctica, como es que evoluciono con el transcurso del tiempo, cuales fueron las circunstancias socioculturales que propiciaron los cambios que tuvo tal concepto hasta llegar a nuestros días, para que podamos rescatar elementos importantes que sirvan para que en un trabajo futuro se pueda contribuir en la construcción del concepto de tangente dinámica desde un punto de vista variacional, esto se puede hacer mediante una secuencia didáctica o situación didáctica, por otro lado consideramos que los resultados que se obtengan como resultado de este trabajo de investigación nos permitirá contribuir al rediseño del discurso matemático escolar, lo cual pretendemos beneficie de manera importante a el sistema escolar.

El Conocimiento y Conocimiento Matemático.

Asumimos en este apartado nuestra postura ideológica con respecto a la forma en como concebimos el conocimiento en general y el conocimiento matemático en lo particular. El hombre en su afán por entender y controlar el medio que lo rodea, utiliza el conocimiento, aquel que le es heredado por sus antepasados, lo comprende, utiliza y sigue desarrollando. Podemos decir que este conocimiento evoluciona, lo cual es natural ya que se encuentra inmerso en una cultura siempre cambiante en donde hay avances científicos y tecnológicos, todo esto propicia su desarrollo, por lo que cuando hablamos de conocimiento lo reconoceremos situado en un tiempo, espacio y contexto socio cultural, como se plantea en Meneses (2001)

> *El problema central que se plantea la sociología del conocimiento es el de desentrañar el contenido y los límites del condicionamiento histórico social y cultural del conocimiento, en la representación del mundo que un grupo social dado (o un sector dentro de él) se hace del universo. A la vez que pretende estudiar las formas en que socialmente se crea y transmite este conocimiento plasmado en una visión del mundo determinada. Es además, tarea importante en esta disciplina el análisis de las determinaciones histórico- sociales sobre la producción del conocimiento científico.*

El surgimiento de un conocimiento matemático puede generarse como una respuesta para satisfacer las necesidades de la sociedad, el cual inicialmente no nace como un conjunto de principios, conceptos, teoremas, lemas, definiciones, etc. Pero también puede no tener una aplicación práctica o uso inmediato con el mundo real, reconocemos también que algunos conocimientos matemáticos no son un producto de continuas abstracciones y generalizaciones de la empiria, tal como lo enuncia Cantoral (2001):

> *… el conocimiento matemático, aun aquel que consideramos avanzado, tiene un origen y una función social asociados a un conjunto de prácticas humanas socialmente establecidas. Esta afirmación no habrá de entenderse en el sentido de que todo conocimiento matemático obedece a una necesidad de naturaleza práctica, puesto que los historiadores de la ciencia han documentado suficientemente que algunas nociones matemáticas no provienen de sucesivas abstracciones y generalizaciones de la empiria. Más bien, nuestra tesis tiene una orientación sociológica puesto que establece una filiación entre la naturaleza del conocimiento que los humanos producen con las actividades mediante las cuales y en razón de las cuales dichos conocimientos son producidos.*

El conocimiento que nos interesa analizar es aquel que es utilizado para satisfacer necesidades y generar desarrollo en la sociedad:

> *“Marx introduce el concepto de praxis, señalando que el conocimiento científico no es simplemente un problema de coherencia interna, de pertinencia lógica, sino que debe pasar a la acción; no basta contemplar, es necesario transformar”*
>
> Meneses (2001)

Nos interesa reconocer la dimensión social del conocimiento matemático, en ese sentido inclusive aquellos conocimientos provenientes de las matemáticas teóricas y que inicialmente no tienen ninguna aplicación práctica en la sociedad, podrán en algún momento dar explicaciones del mundo real para poder entenderlo y servirlo mejor, cuando esto suceda sostenemos tal y como lo enuncia Cantoral, R.(2001) que existirá una filiación entre el conocimiento matemático y las actividades en las que es utilizado. En el caso particular que estamos investigando, sostenemos que el concepto de tangente dinámica responde también a las necesidades de una sociedad.

El conocimiento matemático que ya ha sido designado como objeto de saber por una comunidad científica y que posteriormente se le designa como objeto a enseñar, sufre a partir de entonces cambios con los cuales se pretende que pueda ser insertado en el sistema escolar, una vez que ocurre esto el conocimiento sigue sufriendo cambios con respecto a el conocimiento que le dio origen, estos objetos de enseñanza que se encuentran en la escuela y la relación que guardan con el profesor y el alumno conforman como ya lo hemos mencionado un sistema didáctico, el cual es el objeto de estudio de la matemática educativa.

Enfoques sistémicos en la Matemática Educativa

Al analizar los fenómenos de enseñanza aprendizaje en matemáticas no puede considerarse cada uno de los componentes del sistema didáctico sin tomar en cuenta a los demás y la relaciones que se guardan entre todos, es por eso que en la interpretación de un fenómeno didáctico no se podría poner atención exclusivamente a un solo polo del triángulo didáctico, por ejemplo al centrar la atención sólo en las características cognitivas de los alumnos se desatendería a las otras partes del sistema didáctico como son el profesor y el conocimiento; de tal forma que no podríamos tener una percepción global de la problemática con lo cual nuestra visión estaría muy acotada.

Una definición de sistema la encontramos en Wikipedia[3]:

> *Un **sistema real** es una entidad material formada por partes organizadas (o sus "componentes") que interactúan entre sí de manera que las propiedades del conjunto, sin contradecirlas, no pueden deducirse por completo de las propiedades de las partes. Tales propiedades se denominan propiedades emergentes*

Se dice posteriormente que este concepto también es aplicable a los sistemas humanos o sociales. Podemos observar que en un enfoque sistémico no se puede describir un problema atendiendo a una sola de las partes constitutivas del sistema, sin embargo para su análisis se puede hacer de manera funcional, es decir diferenciando las partes al considerar el papel que desempeñan cada una dentro del sistema (Martínez, 2003).

En el mismo sitio se menciona que:

> *Una **propiedad emergente** se trata de cualquier efecto resultado del funcionamiento de un sistema. Es importante entender que éstas propiedades sólo se observan cuando el sistema está funcionando y no pueden encontrarse en las partes-componentes del mismo.*

(Martínez, 2003)

Resulta desde nuestro punto de vista relevante el considerar las propiedades emergentes ya que son aquellas que solo surgen por el actuar de todos y cada unos de los componentes del sistema.

[3] http://es.wikipedia.org/wiki/Sistema

Los enfoques sistémicos que surgen en la educación matemática, tratan los problemas de enseñanza aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva holística e integradora en donde se tratan los fenómenos didácticos en forma global.

Nuestra postura teórica es aquella que nos dice que al abordar los fenómenos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas se tiene que hacer desde una perspectiva sistémica integradora o sea que abarque las componentes de las que está compuesto el sistema, como lo menciona Godino (2003) haciendo alusión a la Teoría de las Situaciones Didácticas:

> *Una característica importante de esta teoría, aunque no sea original ni exclusiva, es su consideración de los fenómenos de enseñanza – aprendizaje bajo el enfoque sistémico. Bajo esta perspectiva, el funcionamiento global de un hecho didáctico no puede ser explicado por el estudio separado de cada uno de sus componentes, de igual manera que ocurre con los fenómenos económicos y sociales.*

La socioepistemología al respecto nos ofrece una aproximación sistémica amplia e integradora.

Teoría de las situaciones didácticas

La didáctica de las matemáticas ha evolucionado, desde que se le consideraba un arte, para posteriormente continuar con el enfoque clásico en donde se le dio una mayor importancia a los procesos psico - cognitivos, se centro la atención ya sea en el alumno (procesos cognitivos) o en el profesor tomando en referencia a el alumno, sin embargo en el enfoque clásico no se tomaba en cuenta al objeto de estudio, es decir que era algo que se daba por hecho sin tomarlo en cuenta como una problemática de estudio, en una siguiente etapa en la evolución del la matemática educativa se considero a las matemáticas y la naturaleza de los conceptos matemáticos, con esto se amplio la problemática, en donde se hizo importante tomar en cuenta algunos elementos, como son un medio didáctico, el cual comprende: el aprendiz (alumno), algo que debe de ser aprendido (objeto de estudio), un medio que provoca el aprendizaje y un observador (profesor). La Teoría de las Situaciones Didácticas plantea que se requiere de la elaboración de una situación didáctica por parte del profesor y de la observación detallada de ésta, cuando sea implementada en la clase, al elaborar esta situación didáctica es importante tener presente cuales son las variables de esta, es decir cuales son las diferentes estrategias que se pueden adoptar para llegar al objetivo.

La Teoría de las Situaciones Didácticas nos permite decir que a todo conocimiento matemático se le puede hacer corresponder situaciones didácticas que sólo este conocimiento le permite resolver. Los modelos que se implementan como una situación adidáctica (la cual es una situación implementada por el profesor y aparentemente no tiene una intencionalidad didáctica) deben de ser coherentes y deben de permitir la confrontación con base a las observaciones realizadas y por lo tanto rechazar los modelos irrelevantes pero ahora con un sustento más científico; al implementar La Teoría de las Situaciones Didácticas para la construcción del conocimiento matemático por parte de los alumnos, se observan que hay distintas etapas las cuales son: situación adidáctica de acción en esta etapa los alumnos tienen algunas ideas matemáticas, aunque no las reconozcan explícitamente como tales con referencia a lo que tratan de construir, de hecho se puede decir que existe un modelo implícito con el cual se está trabajando, las ideas que se manejan tienen un nivel de nociones protomatemáticas, posteriormente los alumnos utilizan un lenguaje en donde hablan utilizando términos matemáticos se dice que esta etapa es la de formulación, en ella se manejan la ideas matemáticas a un nivel de nociones paramatemáticas, se puede decir que ahora ya empiezan a trabajar con un modelo explícito, en este nivel los alumnos pueden intercambiar información y se hacen concientes de que utilizan ideas de tipo matemático para poder construir su modelo, se logra posteriormente avanzar a otro nivel llamado validación, que es aquel el cual el alumno debe de mostrar porque su modelo es válido en esta etapa el alumno debe de poder sustentar su modelo con un lenguaje matemático, así como el poder contestar argumentaciones de otros alumnos que no apoyan su modelo. Finalmente se encuentra otra etapa en la construcción del conocimiento matemático que es la *institucionalización* del conocimiento en la cual se debe de socializar el conocimiento adquirido, aquí juega un papel protagónico el profesor ya que el se encargará de darle el estatuto cultural que tiene el objeto matemático que se está analizando. En nuestro caso consideramos que el producto de nuestra investigación nos permitirá el poder replantear el discurso matemático escolar con lo cual la institucionalización se llevará acabo utilizando planteamientos diferentes a los que tradicionalmente se utilizan en una clase de Cálculo Diferencial. Otro de los objetivos es mejorar la reproducibilidad de las experiencias, al escoger la situación adecuada, conforme a el uso que se le de o conforme a la naturaleza de la misma se tiene desde nuestro punto de vista una mayor probabilidad de éxito, para construir una situación didáctica fundamentada en esta teoría es importante también hacer un análisis epistemológico de los conceptos matemáticos que se considerarán en la situación planteada ya que de esta forma se pueden retomar elementos perdidos en el transcurso de la historia por efectos de la transposición didáctica y que pueden ser útiles para diseños más eficaces, es relevante también tomar en cuenta sí hay obstáculos epistemológicos o didácticos, ya que esto ayudará a el docente a tomar en cuenta que el proceso de enseñanza aprendizaje de estos conocimientos matemáticos se debe de hacer con cuidado ya que pueden ser conceptos difíciles de aprender para los estudiantes, inclusive se requiere poner atención con el lenguaje utilizado y las estrategias de enseñanza ya que éstas también podrían constituir un obstáculo para el aprendizaje de los conceptos en cuestión.

El obstáculo se refiere a un conocimiento que ante ciertas circunstancias ha demostrado que resulta eficaz para resolver ciertos problemas, pero fuera de ese contexto resulta inconveniente, sin embargo se resiste a ser cambiado debido a que ha mostrado servir en otros casos de tal forma que se revela por ciertos errores específicos que son reiterativos, en Brousseau (1983 citado en Godino, 2003) quien menciona las siguientes características de los obstáculos:

- *Un obstáculo es un conocimiento, no una falta de conocimiento;*
- *El alumno utiliza este conocimiento para producir respuestas adaptadas en un cierto contexto que encuentra con frecuencia;*
- *Cuando se usa este conocimiento fuera de este contexto genera respuestas incorrectas. Una respuesta universal exigiría un punto de vista diferente;*
- *El alumno resiste a las contradicciones que el obstáculo le produce y al establecimiento de un conocimiento mejor. Es indispensable identificarlo e incorporar su rechazo al nuevo saber;*
- *Después de haber notado su inexactitud, continúa manifestándolo, de forma esporádica.*

Utilizando estos elementos, se requiere por lo tanto que se plante una situación didáctica en donde se requiera de un cambio de estrategia, es decir que permita que los alumnos se hagan concientes del cambio de sus concepciones, ya que este cambio permitirá resolver la situación planteada satisfactoriamente.

Al conocer sí hubo obstáculos epistemológicos en el desarrollo conceptual de un conocimiento matemático a lo largo de la historia de su evolución, nos dará una mayor cantidad de elementos para la elaboración de la situación didáctica planteada, puesto que es un obstáculo inherente a la naturaleza del concepto, por lo tanto planteamos que el reconocimiento de este tipo de obstáculos nos permitirá tener mayores elementos para la elaboración de una situación didáctica.

Durante el proceso de construcción de conocimiento matemático, los alumnos van pasando por varias etapas lo cual tiene que ver con el desarrollo y validación de nuevas ideas matemáticas, a estas tapas en La Teoría de las situaciones didácticas se les conoce como situaciones que como ya mencionamos anteriormente son: las situaciones de acción, situaciones de formulación, situaciones de validación y situaciones de institucionalización.

La forma en como se va adquiriendo el conocimiento de la manera en como lo plante la Teoría de las Situaciones Didácticas tiene algunas características especiales que nos muestran que el aprendizaje no se da de un momento a otro, sino que por el contrario es a través de un proceso, en donde el estudiante va pasando por diferentes niveles para poder llegar a la obtención del conocimiento.

Por lo tanto pensamos que al llevar a cabo una forma de trabajo de este tipo (usando estos elementos de la Teoría de las Situaciones Didácticas) en el aula se fomenta el hecho de que el estudiante aprenda a argumentar en función de sus conocimientos y al interactuar con el medio y llevar a cabo sus planteamientos se contribuye a la formación de un pensamiento científico el cual puede ir madurando con el paso del tiempo.

La Transposición Didáctica

Al trabajo que se requiere hacer para transformar un objeto de saber en un objeto de enseñanza se le denomina transposición didáctica y muy frecuentemente en este proceso el objeto de saber (o saber sabio) sufre verdaderas transformaciones. Sí se requiere hacer un estudio científico de la transposición didáctica, entonces hay que tomar en cuenta la transposición didáctica sensu lato, la cual nos menciona que el objeto de saber no nace originalmente como un saber sabio, sino que hay un paso de lo práctico a lo teórico, de lo preconstruido a lo construido, nosotros establecemos que en este paso es factible pensar en prácticas sociales que nacen en la sociedad como situaciones que permiten satisfacer sus necesidades y que propician el surgimiento de objetos matemáticos de tipo pragmático, posteriormente estos objetos de tipo práctico se constituyen en objetos matemáticos teóricos (saber erudito), posteriormente a estos objetos se les puede designar como objetos a enseñar, y en este proceso puede haber nuevamente cambios (transposición didáctica) para que el objeto a enseñar sea colocado en programas de estudio y finalmente se le tiene que dar un tratamiento didáctico para ser llevado a las aulas en este proceso se toma en cuenta la interpretación que le da el profesor a el objeto a enseñar, así como los contenidos de los libros de texto los cuales también le dan un tratamiento didáctico a tales contenidos.

Al colocar un objeto de saber en un medio didáctico se requiere hacerle los ajustes necesarios que este medio le exige. Se hace necesario observar un principio que Chevallard (1991) lo nombra como vigilancia epistemológica, el cual nos permite indagar si hay conversión de objeto de saber con respecto a el objeto de enseñanza y poder determinar cual es esta conversión. En el caso que atendemos en esta investigación, que es el de la tangente dinámica, requerimos conocer el objeto de saber que le dio origen, ya que al conocerlo también podremos saber sí hay conversión de objeto y cual es esta; aunque algo más que observamos y que no enuncia la Teoría de la transposición didáctica, es el hecho de considerar que el objeto de saber nace dentro de un ambiente sociocultural, creemos que dicho ambiente es determinante en el nacimiento de tal objeto, digamos por decirlo así que le es inherente una parte sociocultural propia de la época en la cual nace este objeto, la cual también es objeto de transposición.

La Teoría de la Transposición Didáctica describe un proceso que culmina con los objetos de enseñanza, estamos hablando de lo siguiente, existen conocimientos matemáticos y son reconocidos como tales, es decir son objetos matemáticos y los sistemas escolares los consideran como tales puesto que son evaluados, a estos objetos matemáticos se les conoce como **nociones matemáticas** y tienen ciertas características enunciadas por Chevallard (1991) que son: Puede ser una definición en sentido estricto, puede adoptar la forma de una construcción la cual se realiza por medio de una mostración (demostración) y también tiene ocasiones de uso. Junto a las nociones matemáticas se encuentran las **nociones paramatemáticas**, las cuales son consideradas como herramienta de la actividad matemática, son auxiliares necesarios para la enseñanza aprendizaje de los objetos matemáticos, sin embargo no se les considera objetos de enseñanza, la teoría nos menciona que no permanecen quietos entre estos dos conceptos ya que las nociones paramatemáticas pueden avanzar hacia el nivel de nociones matemáticas, existen también nociones que se encuentran todavía en otro nivel, son las **nociones protomatemáticas,** son ideas requeridas para la enseñanza aprendizaje de los objetos matemáticos, sin embargo el docente las considera como obvias. Todas estas consideraciones nos permiten clasificar al objeto matemático que estamos estudiando, el cual se trata de la tangente pero de forma más específica, la tangente dinámica, además de que también nos da la pauta para considerar el avance de nivel que tienen los conocimientos matemáticos en la sociedad, es decir al surgir una necesidad en la sociedad la respuesta a ella puede surgir de ideas que ni siquiera son concebidas como matemáticas, pero que sin embargo están ahí presentes y sirven, posteriormente se puede avanzar a un nivel superior en donde estas ideas pueden ser utilizadas de una forma consciente aunque todavía no se les considere como objetos matemáticos, finalmente se llega a el reconocimiento social de los objetos matemáticos, los cuales van a pasar a ser parte de nuestros sistemas escolares.

Al llevar a cabo la vigilancia epistemológica, nos permite poder describir cómo fue la transposición didáctica, ya que al delimitar la génesis histórica del conocimiento en función y comparar con el sistema escolar actual en el cual se ha insertado dicho objeto de saber como objeto de enseñanza se puede determinar sí en realidad se han perdido elementos importantes del objeto de saber por efecto de la transposición, se debe de tomar en cuenta también sí el objeto de enseñanza transpuesto considera las exigencias actuales de la sociedad y del sistema de enseñanza en particular en donde se esta trabajando, como menciona Chavallard (1991):

> *En esta hipótesis, que funda la necesidad y la legitimidad de la didáctica de las matemáticas como campo científico, el estudio de la transposición didáctica supone el análisis de las condiciones y de los marcos en los que esta se lleva acabo. Existencialmente, esta perspectiva es la de un optimista moderado…*

Esta teoría nos permite describir que es lo que ha ocurrido con los objetos de enseñanza, que cambios han sufrido con respecto a el conocimiento del cual surgieron (objeto de saber) y sí han sido benéficos o no estos cambios, este análisis nos da elementos para ser utilizados por la Ingeniería Didáctica (de la cual hablamos a continuación) para poder crear situaciones didácticas.

Ingeniería Didáctica

Se utilizará a la Ingeniería Didáctica (ID) sólo en su fase preliminar, como una metodología en nuestro trabajo de investigación, a la cual se le llama así porque se puede comparar con la actividad que realiza un Ingeniero, el cual para llevar acabo su trabajo utiliza la ciencia para la producción de nuevos conocimientos, pero también como un medio de control sobre sus realizaciones, de una forma parecida actúa la ID, nada más que ahora se trabaja con personas, lo cual resulta ser aun más complejo, la ID se utiliza con un doble aspecto: como metodología de investigación y también para crear situaciones de enseñanza – aprendizaje. El profesor crea una serie de secuencias de clase, las cuales tienen como objetivo el aprendizaje en una determinada población estudiantil, el proyecto de enseñanza evoluciona dependiendo de las reacciones de los alumnos y de las decisiones que vaya tomando el profesor sobre la marcha del proceso de enseñanza – aprendizaje, el profesor va tomado decisiones para que la situación didáctica establecida se vaya adaptando a la dinámica de la clase.

Se distinguen algunos elementos importantes para la creación de una ID los cuales son: la dimensión epistemológica, la cual tiene que ver con la naturaleza del conocimiento matemático en cuestión, la dimensión cognitiva, la cual se refiere a los procesos mentales (cognitivos) presentes en la construcción de las ideas y/o conceptos matemáticos, la dimensión didáctica, en la cual se toma en cuenta el sistema de enseñanza y como funciona, así como una cuarta a la que llamamos social.

Se observa que se está haciendo referencia a una perspectiva sistémica ya que bajo el esquema que se acaba de mencionar anteriormente se encuentran interactuando el Profesor, el alumno y el objeto de enseñanza. Estos tres elementos considerados son los mismos que se consideran en la Teoría de las situaciones didácticas a lo que hemos llamado sistema didáctico y que es la unidad mínima de análisis objeto de estudio de la matemática educativa.

En nuestro caso utilizaremos la ID como una metodología de investigación, haciendo una extensión de la misma al estudiar la componente epistemológica, pero tomando en cuenta los contextos socioculturales que le dan origen a el concepto que estamos investigando el cual es el concepto de tangente dinámica, ya que como hemos enunciado con anterioridad este concepto tiene un carácter variacional (puesto que esta cambiando en todo momento) a excepción claro esta de una función de primer orden, esto en contrate con la tangente estática que también es vista por los estudiantes en asignaturas precedentes al Cálculo Diferencial y que los profesores generalmente suponemos que los estudiantes pueden con base a sus conocimientos previos articular un vínculo entre estas tangentes (estática y dinámica) sin embargo como ya lo mencionamos en nuestro problema de investigación este trabajo intelectual no lo hacen los estudiantes, es por eso que la pretensión de nuestra investigación epistemológica en el sentido que mencionamos inicialmente nos proporcionará los elementos suficientes con los que se podrá construir una secuencia didáctica (aunque esto último ya sería tema de otra investigación) además de que también podemos utilizar los productos de esta investigación para rediseñar el discurso matemático escolar.

La Socioepistemología

La componente sociocultural, sostenemos es inherente a el conocimiento, ya que como sabemos las matemáticas son un producto de la actividad humana, las ideas matemáticas nacen bajo un contexto sociocultural propio de la época en cuestión, por consiguiente los objetos matemáticos surgen situados en una época, espacio y contextos socioculturales los cuales forman parte de ellos, considerar la componente social en el desarrollo del conocimiento permite dotar de sentido significativo a el conocimiento matemático que es llevado a los ámbitos escolares, esto se puede lograr a partir de un análisis epistemológico en donde se considera los aspectos socioculturales del conocimiento (componente social) tomando en cuenta también las componentes cognitivas y didáctica propias de la socioepistemología, se pueden desarrollar secuencias de aprendizaje para los alumnos, en nuestro caso consideramos que nuestra investigación nos permitirá dotar de nuevos significados a la noción de tangente dinámica y tener elementos para construir una situación didáctica que nos permita construirla desde un punto de vista variacional.

Empleamos como marco teórico de referencia a la socioepistemología, la cual es una aproximación teórica que toma en cuenta cuatro componentes, las cuales son la componente didáctica, la componente cognitiva, la componente epistemológica y la componente sociocultural, la cual afecta de manera significativa a las tres primeras. Como se menciona en Cantoral y Farfán (2003):

> *…considera necesario dotar a la investigación de una aproximación sistémica que permita incorporar las cuatro componentes fundamentales de la construcción social del conocimiento; su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de transmisión vía la enseñanza. A esta aproximación múltiple le llamaremos el acercamiento socioepistemológico.*

Asumimos que el estudio del Cálculo Diferencial se requieren de procesos avanzados del pensamiento para tratar con los fenómenos de cambio y variación, estos procesos del pensamiento no son construidos exclusivamente de manera individual ya que reconocemos que la cognición es social tal como se menciona en Montiel (2005), en la componente didáctica también esta presente la componente sociocultural ya que en el caso de las clases de matemáticas lo que se reproduce es un discurso matemático escolar, en el cual han intervenido definitivamente elementos socioculturales, los cuales son transmitidos por los libros de texto, los programas de estudio, de hecho podemos afirmar que, somos los mismos docentes, quienes nos encargamos de seguir reproduciendo un discurso el cual muy frecuentemente no es cuestionado, es decir regularmente esta reproducción se hace de forma acrítica, estos elementos teóricos mencionados nos permiten explicar los cambios que ha sufrido el concepto de tangente dinámica a lo largo de la historia, otro elemento importante a considerar es la epistemología del conocimiento matemático, construido este en diferentes espacios socioculturales a lo largo de la historia, de tal forma que al considerar la construcción social del conocimiento matemático es necesario tomar en cuenta el contexto en el que nace ya que al hacerlo así se hace posible analizarlo de una manera integral, los conocimientos matemáticos no nacen solos, es decir separados de una sociedad y una cultura por el contrario se construyen dentro de ella y para ella al satisfacer necesidades latentes en los seres humanos de las diferentes épocas y culturas, en nuestro caso consideramos que el concepto de tangente dinámica tuvo su origen y respondía a ciertas necesidades de tipo social, es decir se encontraba dentro de un contexto sociocultural.

Al reconocer todo lo anteriormente expuesto se hace evidente que el conocimiento matemático se construye para responder a prácticas sociales, nuestro trabajo de investigación se encuentra ubicado dentro de la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV), el PyLV es una línea de investigación que se ocupa del estudio de los fenómenos de enseñanza y aprendizaje de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social, es de relevante importancia las formas en como procesan la información sobre la matematización de los fenómenos variacionales, tomando en cuenta también los contextos socioculturales, es decir la cultura es un elemento a considerar y ejerce influencia en las personas, como aproximación investigativa posee una triple orientación, por un lado se ocupa de estructuras variacionales y de su matematización así como aspectos fenomenológicos, por otro lado se ocupa de del aspecto cognitivo que las personas utilizan cuando estudian fenómenos de cambio y finalmente también estudia los problemas y situaciones que se resuelven en la sociedad, utilizando las estructuras de los fenómenos variacionales.

Establecemos que la forma más elemental de cambio en donde están relacionadas dos variables de forma funcional es la establecida por el modelo $f(x) = mx + b$ para $m \in R$ y $b \in R$, como sabemos al derivar una expresión algebraica diferente a una función lineal, y una vez obtenida la derivada y evaluarla en un punto de una curva(función), su valor le corresponde a la pendiente de la recta tangente en ese punto, esta tangente es cambiante para diferentes puntos de la curva, es decir se tiene una tangente dinámica, tal y como lo establecimos en la definición de nuestro problema de investigación, en los libros de texto no se establece un vinculo o liga entre la pendiente vista como número (estática) y la pendiente dinámica tal y como es requerida en Cálculo Diferencial, el establecer este vínculo es un trabajo intelectual que se le deja a el estudiante y que finalmente no se hace, lo cual trae consigo que conceptos, dentro de ambientes gráficos, como derivada, función creciente y decreciente, así como máximos y mínimos devienen frágiles al no tener una noción de significado de la tangente dinámica, consideramos que el conocimiento se ha "envejecido" por efectos de la transposición didáctica y por tal motivo consideramos que es importante que se diseñen situaciones didácticas que tengan la intencionalidad de que los estudiantes puedan determinar un vinculo entre la tangente estática y la tangente dinámica, y se puedan aportar elementos que permitan construir la noción de tangente dinámica desde un punto de vista variacional.

La socioepistemología tiene por objetivo intervenir benéficamente en los sistemas escolares, en el sistema didáctico, para lo cual un elemento constitutivo primordial en esta aproximación teórica es el de práctica social, como se enuncia en Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez (2006):

> *...el énfasis socioepistemológico no está puesto ni en el objeto preexistente o construido, ni en su representación producida o innata; sino más bien se interesa por modelar el papel de la práctica social en la producción de conocimiento a fin de diseñar situaciones para la intervención didáctica.*

Con base a investigaciones que se han hecho acerca de cómo se manifiesta la práctica social como son: (Cantoral, 1990; Covián, 2005; Montiel, 2005) hemos llegado a una conclusión particular, la Práctica Social la definimos como: “Aquellas acciones que nacen de las vivencias y experiencias cotidianas, realizadas por un grupo social, las cuales propician que emerja un objeto matemático el cual va experimentar a partir de su aparición una evolución producto de la relación dialéctica que este va a tener con la práctica humana con base a la cual y por la cual nació. La práctica social adquiere la función normativa a través del proceso que llamamos institucionalización Covián (2005), consideramos que los objetos matemáticos que surgen a partir de la práctica social tienen diferentes estatus a partir de las necesidades sociales con las cuales interactúan, podemos distinguir dos tipos de necesidades sociales como son: aquellas de **origen pragmático** y las de **origen reflexivo**. Las necesidades sociales de origen pragmático se encuentran en grupos sociales como son: comunidades de artesanos, comunidades domesticas, comunidades de técnico y/o profesionales que utilizan las matemáticas como una herramienta, los objetos matemáticos que surgen como construcción social por parte de esta actividades son del tipo de nociones protomatemáticas y paramatemáticas. Por otro lado tenemos las necesidades sociales de origen reflexivo entre las cuales se encuentran las comunidades científicas las cuales y en función de la prácticas sociales van hacer que emerjan conocimientos matemáticos que permitan hacer que avance la ciencia y transforme a la sociedad, sin embargo para que una forma de pensar, ver la vida por un grupo social pueda ser considerado una práctica social, ésta debe permanecer a través de generaciones satisfaciendo las necesidades por medio de los objetos matemáticos creados. A partir de estos argumentos concluimos que nociones como el de tangente dinámica emerge de ciertas prácticas sociales, y posteriormente este concepto empieza a vivir a través de lo que hemos llamado la institucionalización, la cual es el proceso por medio del cual se difunde la práctica social a otros seres humanos pertenecientes al mismo grupo social.

La noción de tangente desde el punto de vista dinámico procede de problemas geométricos de antaño, como el trazado de tangentes, máximos y mínimos así como la localización y caracterización de los puntos de inflexión por otro lado también había la necesidad de poder predecir estados futuros con base al conocimiento del estado actual de una variable, para lo cual se hacia necesario saber cuanto y como estaba cambiando una determinada variable a analizar, estos elementos forman parte de lo que es la tangente dinámica de la cual estamos hablando y con base a una revisión epistemológica que vamos a realizar en este trabajo de investigación pretendemos observar como se construyó dicho conocimiento, a que propósitos atendía su creación, como fue evolucionando que cambios sufrió y por que lo hizo y como llega hasta nuestros días la noción de tangente variable.

De tal forma que pretendemos también dilucidar todo el proceso de conversión del objeto de saber de referencia hasta convertirse en un objeto de enseñanza y como es transmitido este por medio de un discurso a través de libros de texto, programas de estudio y las propias concepciones que los profesores tienen al respecto del tema en cuestión, a este discurso lo vamos a llamar discurso matemático escolar. En cuanto a los libros de texto se refiere percibimos que además de ser una obra de texto, referida a los elementos de estructura y organización Castañeda (2006), también hay elementos referentes a su contenido, es decir, al discurso que contienen, en este sentido podemos percibir tres elementos importantes del discurso matemático escolar las cuales son: el tipo de actividades matemáticas, las prácticas que involucra, así como el enfoque, la perspectiva e ideología del autor con respecto a el tema que expone. Podemos observar que aunque en los libros de texto aborden los mismos temas, el tratamiento de los mismos se hace de forma diferente, ya que cambian las explicaciones, metáforas, actividades, en cuento a la componente epistemológica en Castañeda (2006) se muestra el siguiente ejemplo:

> *Observamos, por ejemplo el tipo de resultados que presenta R. Martínez (2005) en su estudio de corte didáctico sobre la idea de pendiente en dos libros de texto: (el primer caso geometría elemental de Hemmerling) distingue el carácter invariante de la pendiente como argumento para definirle; en el segundo (álgebra de Leithold) denota a la pendiente como una razón de cambio.*

Con respecto a nuestro tema podemos comentar que efectivamente la pendiente puede tener las dos concepciones mencionadas anteriormente sin embargo no hay textos (actuales) en donde se mencione un vínculo entre las dos concepciones de pendiente, que aunque para muchos profesores puede parecer “obvio” según lo que hemos documentado en nuestro problema de investigación tal “obviedad” no es tal para los estudiantes.

Por otro lado también es importante reconocer con los contextos socioculturales se reflejan en los libros de texto, ya que también influyen la ideas de la época y de la sociedad en la que se vive sus costumbres, tradiciones científicas o formas de tratar los contenidos matemáticos, todo esto está involucrado en los libros de texto y son partes de la obra que también se transponen con respecto a la evolución de los objetos matemáticos, todas estas ideas deben de ser tomadas en cuenta al hacer el análisis de textos, ya que nos permiten tener una idea más global en el análisis epistemológico que se pretende hacer con respecto a el concepto de tangente dinámica.

Capítulo IV

Análisis Documental

Capítulo IV

Análisis documental

Introducción

La geometría es una de las ramas de las matemáticas que se ha encontrado en los ambientes matemáticos desde los antiguos griegos, Newton y sus contemporáneos.

Posterior a la época de Platón, se encuentra situado Euclides, Arquímedes y Apolonio tres de los más grandes geómetras de todos los tiempos, nos hemos percatado que desde este periodo de la humanidad ya era tratado el problema de las tangentes a las cónicas y a las espirales.

Consideramos que Euclides ha influenciado enormemente a grandes matemáticos que lo precedieron, su libro *Los elementos* ha sido uno de los más editados en el mundo, siendo superado sólo por la Biblia; en el siglo XVI la geometría fue utilizada por Copérnico en sus cálculos astronómicos, para él, las matemáticas y en particular la geometría fue una herramienta indispensable para sus trabajos, de hecho hay un vinculo geométrico entre las subtensas (cuerdas) y los arcos que las envuelven; Copérnico nota que a medida que los arcos se hacen más y más pequeños se parecen cada vez más a las cuerdas que subtienden hasta que se llega a un límite, así parte de este hecho para obtener tablas con las cuales hace sus cálculos astronómicos.

Posteriormente Galileo utiliza también a la recta tangente como una herramienta que sirve como medio para hacer el desarrollo de sus problemas, se puede verificar que la utiliza junto con la semejanza de triángulos en su libro diálogos sobre dos nuevas ciencias.

Fermat trata el problema de las tangentes a las curvas, así como de los máximos y mínimos, problemas que en esa época eran de suma importancia para los matemáticos de entonces. Los argumentos que utilizaba aunque no eran explícitamente de tipo infinitesimal, sí eran aproximaciones a estos ya que para poder encontrar la tangente a una curva, así como los máximos y mínimos en su procedimiento Fermat utilizaba una ε (puede ser alguna otra letra), a la cual posteriormente le daba el valor de cero para obtener los resultados deseados es decir elimina los términos en donde aparece la ε lo que en nuestros términos equivaldría a decir que $\Delta x \to 0$, vemos por lo tanto que Fermat utiliza argumentos que se van pareciendo a lo que posteriormente se llamaría lo infinitamente pequeño para encontrar la tangente, y a su vez utiliza la tangente para encontrar máximos y mínimos utilizando el mismo tipo de argumentos.

Vemos también el método de Descartes para encontrar la tangente, en su caso utiliza la tangente, así como la normal para poder determinar propiedades de las curvas, nos damos cuenta que el método utilizado por Descartes no se utilizan argumentos de tipo infinitesimal y que utiliza tanto la tangente como la normal para encontrar ángulos entre curvas, así como poder determinar propiedades de ellas.

Isaac Barrow utiliza también la tangente a una curva e intuye una cierta relación entre ella y el área bajo la curva, sin embargo no la logra ver de forma amplia y clara, además sigue conservando la idea antigua de los griegos, de la tangente estática a una curva.

Newton percibe claramente a la tangente a una curva y el área bajo la curva como operaciones inversas, además que para encontrar la tangente a una curva utiliza ideas de tipo infinitesimales, de tipo variacional, así como ideas del paso al límite, utiliza sus fluxiones para encontrar la pendiente de la recta tangente a una curva, diciendo que esta dada por $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, además de que encuentra un método general con el cual resolver todos los problemas particulares que se encontraban en su época, como son los problemas de las tangentes, máximos y mínimos, así como cuadraturas (integración), lo mismo ocurre con Leibniz quien trata de encontrar un método general para resolver los problemas existentes de la época aunque el parte de problemas de tipos filosóficos con el uso de los infinitesimales a diferencia de Newton que trata con las fluxiones que nos dicen cuanto está cambiando las variables nos hablan acerca de la velocidad de cambio de ellas con respecto del tiempo, ambos llegan a los mismos resultados y logran un método general de resolución de problemas particulares que imperaban en la época, entre otros el problema de las tangentes, cuadraturas, así como el de máximos y mínimos.

Otra etapa importante fue la difusión de las ideas del Cálculo hacia la gente en general, es decir no aquella que precisamente perteneciera a el grupo de los matemáticos eruditos, a este respecto podemos mencionar dos obras importantes escritas por el Marques de L´Hospital y María Agnesi, en tales obras se observa también la concepción acerca de la tangente a una curva, en donde se concibe a la curva compuesta por una sucesión de segmentos infinitesimales y la tangente es la prolongación de uno de ellos en ambos sentidos en un punto de la curva, se le utiliza también a la tangente para la determinación de máximos y mínimos, así como los puntos de inflexión. Cabe destacar en estas obras el carácter geométrico que tiene ya que se recurre a la geometría y las gráficas como un medio de transmitir y sustentar ideas.

Conforme va transcurriendo el tiempo los matemáticos de los siglos XVIII y XIX se encargan de seguir desarrollando el Cálculo y dar un mayor rigor científico a sus ideas, con lo cual también la introducción del álgebra va ganando más terreno de aplicación en el Cálculo y va desplazando poco a poco a los recursos geométricos visuales utilizados en periodos anteriores, de tal forma que si revisamos el libro de Cauchy Curso de Análisis se observa que en el prácticamente en toda la obra no hay gráficas, aunque sí se mencionan métodos en donde esta implícito el uso de que la tangente es horizontal en los máximos y mínimos, esta situación no se hace explícita.

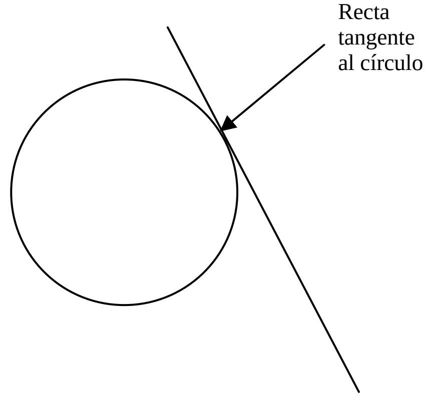
Es importante destacar que para hacer nuestra revisión de textos antiguos nos encontramos con diferentes tipos de obras; las **obras eruditas** que son aquellas escritas por matemáticos eruditos pertenecientes a una comunidad científica y cuyo interés principal es difundir la ciencia, expresar sus resultados obtenidos para que otros miembros de la comunidad científica o pertenecientes a ese ambiente erudito puedan conocerlos, al compartir sus ideas también se perseguía el hacer avanzar la ciencia, dentro de los autores de este tipo de obras que analizaremos en este trabajo, tenemos a Copérnico, Galileo, Fermat, Descartes, Barrow, Newton, Leibniz, Euler, Lagrange y Cauchy, también aquellas obras cuyo principal interés es difundir sus ideas a un público más amplio no necesariamente erudito y se caracterizan precisamente por la forma en la que están escritas ya que utilizaban más de una forma para explicar un mismo concepto, por ejemplo en el caso de la obra de

L´Hospital nos muestra tres argumentaciones diferentes para mostrar el mismo concepto, Castañeda (2004) en donde también se comenta que se intenta hacer *"un esfuerzo didáctico de proveer de múltiples significados a estos conceptos desde distintos escenarios"* la intencionalidad de este tipo de obras es la didáctica lo cual podemos ver también en las dos obras que vamos a revisar ya que podemos decir que hubo gran importancia en el uso de las figuras puesto que mediante ellas se formulaban explicaciones convincentes acerca de cada uno de los temas tratados. Mediante las figuras se podían ver las relaciones entre los triángulos semejantes, así como esquematizar lo infinitamente pequeño; les vamos a llamar a estos libros, **obras de difusión**, en este genero en nuestro trabajo de investigación analizaremos las obras del Marques de L´Hospital y la de María de Agnesi, también tenemos los **textos escolares** cuya intencionalidad también es la didáctica aunque tiene la intención de responder a las necesidades de un programa escolar utilizado en diferentes sistemas escolares en nuestro caso particular se revisara la obra de Granville que ha servido durante muchos años como libro de texto en la(s) materia(s) de Cálculo Diferencial e Integral, la estructura de esta obra está dividida en capítulos y secciones, muestra ejemplos y aparecen problemas resueltos y por resolver con diferentes grados de dificultad, en el mismo texto se agregan recomendaciones didácticas.

Momentos históricos de la tangente

Antecedentes a la definición

La Geometría es una de las ramas de las matemáticas que se desarrollo desde tiempos muy remotos, podemos decir que uno de sus momentos más resplandecientes es en la antigua Grecia en donde existieron grandes pensadores que la utilizaron, desarrollaron y le hicieron aportaciones importantes, desde entonces se trataba el problema de las tangentes, Apolonio (190 a. C.) construyó las tangentes a las cónicas, Arquímedes (287-212 a. C.) hizo lo propio para las espirales. Aunque el punto de vista utilizado era estático puesto que se cortaba a la curva en un solo punto dejándola de lado.



Tal como lo cita Collados (1998):

> *Karl Popper llega a asegurar que Platón da en la historia espiritual del hombre un golpe de timón que determina de allí en adelante "el retrato geométrico del mundo, precursor por lo tanto, de la ciencia moderna, de la ciencia de Copérnico, Galileo, Kepler y Newton". Popper hace bien en detenerse en este último, ya que después de el asistimos a un renacimiento vigoroso de la aritmética.*

Uno de los grandes pensadores que ha influenciado notablemente a la humanidad ha sido Euclides, Perero (1994):

> *Euclides (300 a. C.) organizó el trabajo de todos los matemáticos que le había precedido en una unidad bien estructurada, usando la lógica de Aristóteles, y creando un modelo deductivo que por más de 2000 años se creyó perfecto e influenció la manera de pensar de la humanidad y también la enseñanza de las matemáticas en todas las escuelas del mundo. Este último aspecto nunca se cuestionó hasta que Jean Dieudonné, en 1964, lanzo su famoso grito de "Abajo Euclides".*

Un elemento muy importante en el desarrollo de las matemáticas ha sido la Geometría, y esta ha influenciado así como servido a grandes personajes en la historia de las matemáticas, como Copérnico, Galileo, Kepler, Newton, Leibnitz, Barrow, Descartes, Fermat, entre otros.

Conforme transcurrieron los años hubo un período en la historia en que las ideas de los griegos fueron abandonadas, esto debido a la dominación árabe en territorio europeo, cuando las fronteras de la jurisdicción árabe fueron derribadas la ciencia vuelve a retomar nuevamente las ideas griegas, esto junto con las ideas medievales sobre el movimiento, variabilidad y el infinito en conjunción con el álgebra simbólica y la geometría analítica de finales del renacimiento forman el conjunto de conocimientos que dan origen a el Cálculo infinitesimal Cantoral y Farfán (2004).

Nicolás Copérnico (1473-1543)

La geometría fue utilizada también por Nicolás Copérnico (1473-1543) quien la uso como herramienta para llegar a conjeturas astronómicas, en donde como sabemos una de sus conclusiones más importantes fue que la tierra no era el centro del universo, ni del sistema solar, mas bien concluía que la tierra era el tercer planeta que se encontraba alejado del sol y que giraba a su alrededor. Para Copérnico el uso de las matemáticas en general y de la geometría en particular era indispensable para poder llevar acabo sus razonamientos astronómicos, tal como lo dice en su libro *Sobre las revoluciones de los orbes celestes, Copérnico (1543/2003):*

> *Pues es propio del astrónomo calcular la historia de los movimientos celestes con una labor diligente y diestra. Y además concebir y configurar las causas de estos movimientos, o sus hipótesis, cuando por medio de ningún proceso racional, puede averiguar las verdaderas causas de ellos. Y con tales supuestos pueden calcularse correctamente dichos movimientos a partir de la geometría, tanto mirando hacia el futuro como hacia el pasado.*

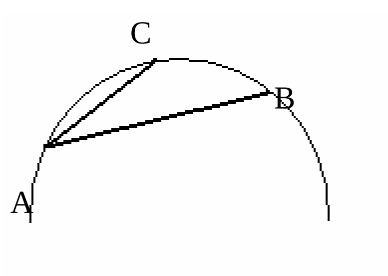
Nicolás Copérnico, Sobre las revoluciones de las orbes celestes
A hombros de gigantes, 1543, pp. 17

Al revisar la obra de Copérnico, observamos que en prácticamente toda ella se encuentra presente el uso de la geometría para poder determinar la posición de los planetas, así como también poder determinar la forma en como se mueven y las trayectorias que siguen, en su libro tiene una serie de tablas en donde reporta entre varias cosas las posiciones de los planetas.

Hay un problema en su libro en donde se menciona la recta tangente y es el siguiente:

PROBLEMA

Pero puesto que el arco es siempre mayor que la subtensa a él trazada, siendo la recta la línea más corta de las que tienen los mismos extremos, con todo la desigualdad tiende a la igualdad al pasar las secciones del círculo de mayores a menores, de modo que, el punto de contacto extremo (de tangencia) del círculo coexisten la línea circular y la recta: en consecuencia es necesario que, antes de que esto ocurra, difieran entre sí con una discrepancia poco manifiesta. Sea, pues, por ejemplo, AB un arco de III grados y AC uno de I grado y medio; se demostró que la subtensa AB tiene 5.235 unidades, de las que el diámetro propuesto tiene $\overline{cc}$ [200000], y AC de 2.618 de las mismas unidades. Y siendo AB el doble del arco AC, sin embargo la subtensa AB es menor que el doble de la cuerda AC, que supera en una unidad alas 2.617. Pero si tomamos AB de un grado y medio y AC de tres cuartos de grado, tendremos la subtensa AB de 2.618 unidades y AC de 1.309 unidades, que aunque debe de ser mayor que la mitad de la subtensa AB, en nada parece diferenciarse de la mitad, sino que ahora surge la misma proporción entre los arcos y las líneas rectas.



Luego, como vemos hemos llegado a un punto, en el que la diferencia entre recta y la curva que la envuelve escapa a los sentidos, como convertidos en una sola línea, no dudamos en tomar 1.309 unidades como subtensa de tres cuartos de grado, en igual proporción con respecto a un grado y con respecto a las partes restantes [del grado], de modo que añadiendo un cuarto a los tres cuartos establezcamos la subtensa de un grado en 1.745 unidades, la de medio grado en 872 ½ unidades, y la de un tercio en 582 unidades aproximadamente.

(Copérnico, 1543, pp. 49 – 50)

Posteriormente Copérnico utiliza todo lo anterior para elaborar una tabla de las cuerdas subtendidas en un círculo, tabla que después es usada para sus cálculos astronómicos.

En el problema anterior se encuentra presente ideas de tipo variacional y el paso al límite, ya que conforme los ángulo se van haciendo más pequeños se ve que la subtensa y el arco que la envuelve se empiezan a semejar mucho, inicialmente se encuentra presente una característica entre los arcos y las subtensas que estos generan, lo cual se refiere a que la razón entre dos arcos es mayor que la razón entre la mayor y la menor de las rectas subtendidas [cuerdas], como lo menciona también el teorema sexto del libro que estamos hablando:

Teorema Sexto

La razón entre dos arcos es mayor que la razón entre la mayor y la menor de las rectas subtendidas [cuerdas].

Sean en un círculo dos arcos desiguales unidos, AB y BC, y sea el mayor BC. Afirmo que la razón de BC a AB es mayor que la de las subtensas BC a AB.

(Nicolás Copérnico, 1543, pp. 48 y 49)

Sin embargo al revisar la relación entre los arcos y sus mitades se ve que cuando estos arcos se vuelven cada vez más pequeños, llega un momento en que esta relación (la mencionada en el teorema sexto del libro de Copérnico) entre los arcos y sus cuerdas deja de existir, del ejemplo mencionado podemos ver lo siguiente:

Para el caso en que el arco AB = 3° y el arco AC = 1.5° las subtensas miden 5235 y 2618 unidades respectivamente se observa lo siguiente:

$\frac{3}{1.5} > \frac{5235}{2618}$ Con lo cual se cumple el teorema sexto, sin embargo al reducir los arcos, siendo que ahora el arco AB = 1.5° y el arco AC = .75° las subtensas miden 2618 y 1309 unidades respectivamente de lo cual se ve que:

$\frac{1.5}{.75} = \frac{2618}{1309}$ Con lo cual ya no se cumple el teorema sexto enunciado anteriormente

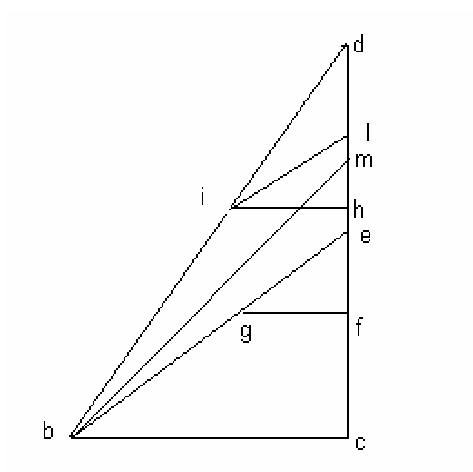
De tal forma que el mismo Copérnico menciona que hay un momento en que la diferencia entre la recta y la curva que la envuelve escapa a los sentidos, estas ideas le permiten a Copérnico elaborar sus tablas las cuales serán usadas posteriormente para la elaboración de sus cálculos. Nos interesa remarcar como en este problema se encuentra presente ideas del Cálculo infinitesimal, las líneas del texto que dicen "*Luego, como vemos hemos llegado a un punto, en el que la diferencia entre recta y la curva que la envuelve escapa a los sentidos, como convertidos en una sola línea*" lo ponen de manifiesto, al observar esto Copérnico pone en práctica ideas que a nuestro parecer son parecidas a lo que actualmente concebimos como "límite". Podemos percatarnos también la idea de tangente que tiene Copérnico, según lo descrito anteriormente la subtensa coexiste con la curva en el punto extremo, en ese punto la subtensa y la tangente se convierten en la misma recta; como se vera posteriormente el Marques de L´Hospital maneja ideas similares al establecer que una curva esta compuesta por segmentos de recta infinitamente pequeños, también encontramos otra idea presente implícitamente la cual es manejada posteriormente por Newton en su libro principios matemáticos de la filosofía natural, la cual se refiere a encontrar la razón última de cantidades evanescentes, no antes ni después de que se desvanezcan, si comparamos esto con el enunciado del problema expuesto por Copérnico en donde dice que: "*coexisten la línea circular y la recta: en consecuencia es necesario que, antes de que esto ocurra, difieran entre sí con una discrepancia poco manifiesta.*" Copérnico (1543), lo cual es muy parecido a determinar la razón límite, que para el caso que estamos manejando se presenta cuando se tiene un arco de 1.5° y su mitad que es un arco de .75° es decir en este preciso instante se puede tomar la relación existente entre los arcos y sus subtensas, para que con base en esa información se puedan calcular los valores de tablas que Copérnico utiliza posteriormente. El uso entonces que le da Copérnico a la tangente es para encontrar la razón última entre segmentos infinitamente pequeños.

Galileo Galilei (1564-1542)

Con respecto a Galileo Galilei, el uso la idea de tangente a una curva, tal y como se pone de manifiesto en su libro "Diálogo sobre dos nuevas ciencias" Galileo se ve como la emplea, a continuación reproducimos un texto en donde se observa lo que comentamos:

> *TEOREMA. PROPOSICIÓN VIII*
>
> *La amplitud de las parábolas descritas por los proyectiles con el mismo impulso (ímpetu) y según elevaciones que superan o no llegan, según ángulos iguales, al ángulo semirrecto, son iguales entre sí.*
>
> *En el triángulo mcb [figura 19] sea el lado horizontal bc igual al perpendicular cm. De este modo, el ángulo mcb será un ángulo semirrecto, prolonguemos la línea cm hasta d y debajo de la diagonal mb formemos en b dos ángulos iguales: mbe y mbd. Hay que demostrar que en el caso de dos parábolas descritas por dos proyectiles desde el extremo b con el mismo impulso [ímpetu], uno con el ángulo ecb y el otro con el dbc, las amplitudes de dichas parábolas son iguales. Dado que el ángulo externo bmc es igual a la suma de los ángulos internos mdb y dbm, el ángulo mbc se puede también equiparar a los anteriores. Y es que si en ves del ángulo dbm ponemos el ángulo mbe, el ángulo mbe será igual a los dos ángulos mbe y bdc. Si sustraemos ahora el ángulo común mbe,*

tenemos que el queda, dbc, es igual al otro restante, ebc. De aquí que los triángulos dcb y bce son semejantes. Dividamos por la mitad las líneas de y ec por los puntos h y f, respectivamente; tracemos ahora las líneas hi y fg, paralelas a la horizontal cb; y como dh es a hi así ih es a hl, por lo que el triángulo ihl será semejante al triángulo ihd, siendo también semejante al triángulo egf. Como quiera que ih y gf son iguales (ya que cada una de ellas es la mitad de bc), se sigue que fe, esto es, fc, es igual a hl; si añadimos además, a cada una de ellas la parte común fh, resultará que ch es igual a fi Así pues, si suponemos que una semiparábola es descrita a través de los puntos h y b, siendo su altura hc y su elevación [sublimitas] hl, su amplitud será cb. Esta es le doble de hi, puesto que hi es la media proporcional entre dh o ch y hl. La línea db es tangente a la parábola al ser ch igual a hd. Si imaginamos una vez más una parábola descrita a través de los puntos f y b con una elevación fl y una altura fc, siendo la media proporcional de ambas fg, que es la mitad de la horizontal cb, entonces, lo mismo que antes, será cb su amplitud, siendo la línea eb tangente en b a dicha amplitud, puesto ef y fc son iguales. Pero los dos ángulos dbc y ebc (es decir las elevaciones de aquellas) distan igualmente de un ángulo de 45°, luego se hace evidente lo queríamos demostrar.



Galileo Galilei, 1638, Diálogos sobre dos nuevas ciencias
A hombros de gigantes, pp. 540 y 541

Notamos que en el problema descrito se hace uso de la recta tangente para poder hacer los cálculos geométricos correspondientes, al usarla para poder describir los triángulos semejantes formados y poder de esta forma determinar la amplitud de la parábola. En este caso la recta tangente es auxiliar en las construcciones geométricas requeridas con lo cual se hacen las demostraciones. Podemos ver que la tangente es utilizada por Galileo para la creación de triángulos semejantes los cuales son indispensables en la resolución de problemas sin la cual difícilmente se podría resolver.

El problema de la tangente es abordado en el siglo XVII por diferentes personajes, como son:

Pierre de Fermat (1601-1665)

El método de Fermat consistía en que dado que se tiene un polinomio $y = f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$ se puede obtener un polinomio del tipo $f(x+h)$ al cual al restársele el polinomio original $f(x)$ se obtenía un nuevo polinomio con términos en *h* el cual es divisible por *h*, y al polinomio así obtenido de esta división se le cancelan los términos que contengan *h*, obteniéndose así la ecuación de la recta tangente. Observamos aquí que Fermat no hace referencia a lo infinitesimal, aunque se aproxima a ello ya que en su método acaba haciendo $h = 0$ y por lo tanto eliminar los términos que contiene *h*.

Método para trazar tangentes

En el método para trazar tangentes de Fermat podemos decir que utiliza elementos de tipo gráfico visual, así como ideas intuitivas de cambio y lo que pasa con estos cambios cuando se hacen muy pequeños, Fermat utilizaba en sus desarrollos un pequeño ε, y posteriormente desaparecían los términos en donde se encontraba aunque él no decía que ε se aproxima a cero, o se haga cero o sea igual a cero, sino solo que el término que contenga a la ε debe ser eliminado. A continuación describimos el método citado en Cantoral y Farfán (2004):

> *Sea la curva OPP´ (véase la figura 4.11). La recta PT es tangente a la curva en el punto P. El punto T es la intersección de de la recta tangente con el eje de las abscisas.*

Llamamos subtangente al segmento TQ. Por lo tanto hallar la recta tangente es equivalente a hallar la subtangente TQ. Por la manera en que esta construida la figura, los triángulos TPQ y PSR son semejantes, y se satisfacen las siguientes relaciones entre sus lados:

$$\frac{QT}{PR} = \frac{PQ}{SR}$$

Y, por lo tanto,

$$TQ = \frac{PR \bullet PQ}{SR}$$

Como $PR = QQ' = \varepsilon$. *Si* ε es pequeño se tiene que

$$SR \approx P'R$$

Pero,

$$P'R = P'Q' - RQ' = P'Q' - PQ$$

Entonces,

$$TQ \approx \frac{\varepsilon \bullet PQ}{P'Q' - PQ}$$

Finalmente, la igualdad se obtendrá cuando $\varepsilon = 0$

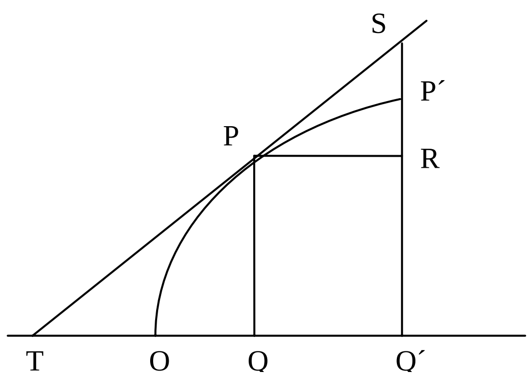


Figura 4.11

(Cantoral y Farfán, 2004, pp. 71 y 72)

En el método para trazar tangentes que establece Fermat, utiliza la subtangente que es la distancia de un punto T el cual se encuentra en la intersección de la tangente con el eje de las abscisas y un punto Q que es la abscisa del pie de la perpendicular trazada desde el punto P, con la curva dada. Al utilizar este método se muestra también que es a base de aproximaciones donde se ve que las ideas se van acercando cada vez mas a la de los infinitesimales, aunque no se precisaban con exactitud el significado de ε el cual en nuestros días lo podríamos interpretar como un diferencial, el cual a medida que es más pequeño se puede hacer la aproximación de que: $SR \approx P'R$, también se hacen consideraciones en la figura en donde se dice que un pequeño arco se aproxima a un segmento y algunos argumentos de este tipo se utilizan para encontrar la recta tangente buscada de tal forma que al hacer la consideración de que $\varepsilon \to 0$ y escribiendo en notación moderna se llega a la conclusión de que la subtangente (t) esta dada por:

$$t = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

En donde podemos citar a Cantoral y Farfán (2004):

> *Debemos observar que este método de Fermat independientemente de los problemas de existencia de límites, dependía de la existencia de una relación explícita entre la variable y, y la variable x de la forma $y = f(x)$.*

Método utilizado por Fermat para determinar máximos y mínimos

Fermat aplica un método en donde se utiliza la noción de tangente para calcular los máximos y mínimos de una función, el método se describe al resolver el siguiente problema, Cantoral y Farfán (2004):

> *Dado un segmento, hallar el punto sobre él de tal suerte que el rectángulo que tiene por lados los dos segmentos que el punto determina sea de área máxima.*

Sea $\overline{AC}$ *el segmento dado en la figura 4.10, de longitud b, y sea B un punto dado sobre* $\overline{AC}$*. Tomemos como x a la longitud del segmento* $\overline{AB}$*, así que el segmento* $\overline{BC}$ *tiene por longitud b-x. De lo anterior el rectángulo formado (ver rectángulo construido sobre* $\overline{AB}$*) tiene área x(b-x).*

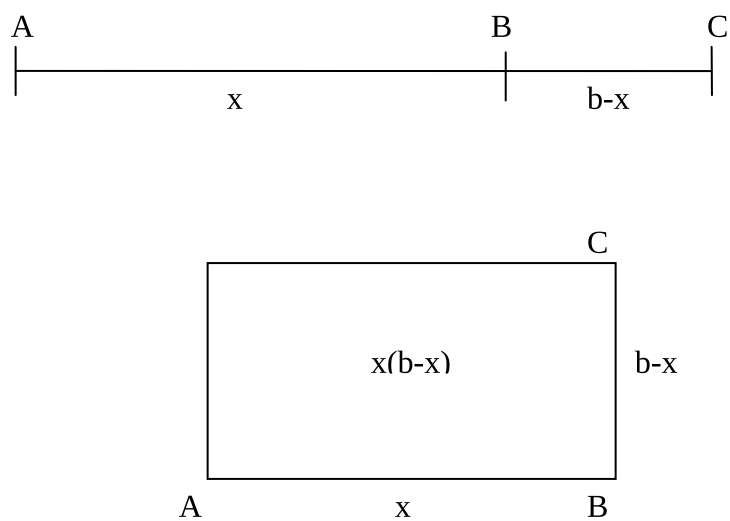


Figura 4.10

Luego entonces se debe maximizar la expresión anterior. Para ello considera un punto adicional B´ sobre $\overline{AC}$ *de forma que la longitud* $\overline{AB}$ *sea un poco distinta de x, es decir* $x+\varepsilon$*, y por lo tanto el segmento* $\overline{B'C}$ *tendrá una longitud* $b-(x+\varepsilon)=b-x-\varepsilon$

(Cantoral y Farfán, 2004, pp. 69 – 70)

Se puede decir que para Fermat era evidente que los valores del área del rectángulo anterior estaban cambiando y dichos cambios dependían del valor que tuviera la "*B*", posteriormente considera el poder formar un rectángulo un poco diferente haciendo que cambie el valor de "*x*" al sumarle un pequeño valor de ε, como se puede ver el pequeño valor de ε nos proporcionará un área diferente, esta área puede ser mayor o menor a la del rectángulo original sin embargo pensamos que Fermat concluye que en el área máxima del rectángulo original debería de ser aproximadamente la misma que el formado por *B´*, además también podemos observar como el considera un modelo geométrico para hacer su demostración, esta forma de utilizar modelos geométricos para ciertas demostraciones matemáticas era característico de su época, aunque también de manera intuitiva se observa como hace que ε se acerque a cero en notación actual podríamos decir que lo que estaba haciendo es que ε tienda a cero ($\varepsilon \to 0$) aunque en realidad no lo manifestó precisamente de esta forma.

Observamos aquí una combinación de un modelo geométrico con ideas que por su tendencia se irían acercando a los procesos infinitesimales, en el caso citado anteriormente nos referimos a el momento en que se considera cuando ese pequeño cambio de ε el cual actualmente lo podríamos denotar como Δx se hace infinitamente pequeño, lo cual es nuestra idea actual de diferencial.

Posteriormente se desarrolla la expresión $x(b-x) \approx b-(x+\varepsilon) = b-x-\varepsilon$ para explicarla en términos actuales y obtenerse una expresión del tipo:

$$\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} = 0$$

Esta expresión involucra ideas como son:

- Que $\varepsilon \to 0$
- La comparación de Δf con respecto a ε (Δx)
- La Δf no está cambiando en el punto donde el área es máxima

Pensamos que la idea de máximos (y mínimos) lleva implícita la idea de tangente dinámica ya que al decir que en esos puntos la tangente adquiere un valor de cero esto implica que antes y después de los puntos críticos en una función la tangente tiene valores diferentes a cero y para poder tomar el valor de cero tuvo que haber estado cambiando.

La expresión anterior maneja la notación de función, y la expresión corresponde a la de la tangente, solo que para un triángulo rectángulo infinitamente pequeño.

Con el método de Fermat se utilizan argumentos parecidos a los infinitesimales, tanto para calcular la tangente como para determinar los máximos y mínimos.

René Descartes (1596 – 1650)

En el libro de la Geometría de René Descartes en el Libro II titulado sobre la naturaleza de las líneas curvas se dice lo siguiente:

> *Los antiguos estaban familiarizados con el hecho de que los problemas de la geometría pueden dividirse en tres clases, a saber, problemas planos, sólidos y lineales. Esto equivale a decir que algunos problemas requieren sólo de circunferencias y líneas rectas para su construcción, mientras que otros requieren de una sección cónica y aún otros requieren curvas más complejas.*
>
> *(Rene Descartes, 1637, Traducción de Roberto R. García Aguilar, p. 25)*

A continuación mostramos un ejemplo de aplicación, práctica del método de Descartes para hallar la recta normal y la tangente, De la Fuente (   )

Es original de Descartes y consiste en el cálculo de las rectas normal y tangente en un punto de una elipse Centrada en el origen de coordenadas)

Si $C(x_0, y_0)$ *es el punto conocido de la elipse, suponemos que el centro del círculo es el punto P (v, 0) situado en el eje OX.*

Las ecuaciones de la elipse y de la circunferencia de centro P serán:

$$(x-v)^2 + y^2 = r^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Debemos calcular v para que las dos ecuaciones tengan una solución doble en $x = x_0$.

Despejando y^2 *en la elipse y sustituyendo en la circunferencia:*

$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \Rightarrow y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

$$(x-v)^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)=r^2 \Rightarrow x^2-2vx+v^2+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}=r^2$$

Ordenando a ecuación en x, queda:

$$x^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)-2vx+v^2+b^2-r^2=0$$

Si esta ecuación tiene una solución doble en $x=x_0$ *, se puede escribir como:*

$$c(x-x_0)^2=cx^2-cxx_0+cx_0^2$$

Igualando términos, tendremos:

$$1-\frac{b^2}{a^2}=c;-2=-2cx_0$$

Por tanto: -2v=-2 $\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x_0 \Rightarrow v=x_0-\frac{x_0b^2}{a^2}$

Luego la pendiente de la recta normal en el punto (x_0,y_0) *será:*

$$m=\frac{y_0}{x_0-\left(x_0-\frac{x_0b^2}{a^2}\right)}=\frac{y_0}{\frac{x_0b^2}{a^2}}=\frac{a^2y_0}{b^2y_0}$$

Y la recta normal tendrá por ecuación:

$$y-y_0=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x-x_0)$$

También podemos calcular la tangente en (x_0,y_0)*:*

$$y-y_0=\frac{-b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0)$$

Quitando denominadores y operando queda:

$$ya^2y_0 - y_0^2a^2 = -b^2x_0x + b^2x_0^2$$
$$xx_0b^2 + yy_0a^2 = b^2x_0^2 + a^2y_0^2$$

Dividiendo por a^2b^2 *obtenemos:*

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

Luego obtenemos la ecuación habitual de la tangente de la elipse en el punto (x_0, y_0) *de ella:*

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

Con base a la resolución de este problema práctico utilizando el método de Descartes, se utiliza considerando que una circunferencia toca a un solo punto de una curva, para lo cual tiene que resolver una ecuación de segundo grado con solución doble. También decimos que este método es generalizado para otros casos en donde Descartes necesita encontrar tanto la normal de una curva en un punto, como la tangente en ese mismo punto.

De hecho en su libro de Geometría dice lo siguiente:

> *Finalmente todas las demás propiedades de las curvas dependen sólo de los ángulos que estas curvas forman con otras líneas. Pero el ángulo formado por dos curvas que se intersecan puede medirse fácilmente como el ángulo de dos líneas rectas, siempre que una línea recta pueda trazarse en ángulos rectos con una de estas curvas en su punto de intersección con la otra. Esta es la razón que tengo para creer que habré dado aquí una introducción suficiente al estudio de las curvas cuando he dado un método general para trazar una línea recta que forme ángulos rectos con una curva en un punto escogido arbitrariamente sobre ella. Y me atrevo a decir que éste no es sólo el problema más útil y general en geometría que yo conozca, sino incluso el que más he deseado conocer.*
>
> *Descartes, 1637, p. 39*

Observamos la gran utilidad que le atribuye Descartes a el uso de la normal y la tangente a una curva, ya que como el lo indica con este conocimiento se pueden conocer las propiedades de las curvas, sin embargo podemos decir que no se utilizan argumentos de tipo variacional. Descartes utiliza a la recta tangente y normal a una curva para poder conocer sus propiedades y determinar ángulos entre curvas

Isaac Barrow (1630 – 1677)

Isaac Barrow quien fue el profesor de Isaac Newton también utilizo la tangente como herramienta fundamental para poder llevar acabo sus cálculos.

XI. Sit linea quæpiam Z G E, cujus axis V D; ad quam imprimìs applicatæ perpendiculares (V Z, P G, D E) ab initio V Z continuè utcunque creſcant; ſit item linea V I F talis, ut ductâ quâcunq; rectâ E D F ad V D perpendiculari (quæ *curvas* ſecet punctis E, F, ipſam V D in D) ſit ſemper *rectangulum* ex D F, & deſignatâ quâdam R æquale *ſpatio* reſpectivè *intercepto* V D E Z; fiat autem D E . D F :: R . D T; & connectatur recta T F; hæc curvam V I F continget.

Fig. 109.

Sumatur enim in linea V I F punctum quodpiam I (illud primò ſupra punctum F, verſus initium V) & per hoc ducantur rectæ I G ad V Z, ac K L ad V D parallelæ (quæ lineas expoſitas ſecent, ut vidés) éſtque tum L F . L K :: (D F . D T ::) D E . R; adeóque L F × R = L K × D E. Eſt autem (ex præſtituta linearum iſtarum natura) L F × R æquale ſpatio P D E G; ergò L K × D E = P D E G ⊐ D P × D E. Unde eſt L K ⊐ D P; vel L K ⊐ L I.

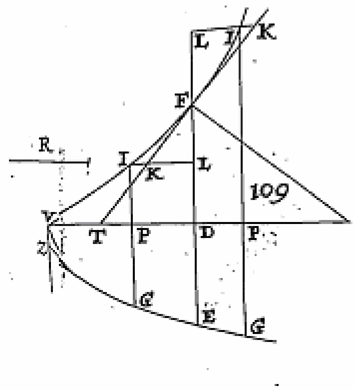
Fig. 110.

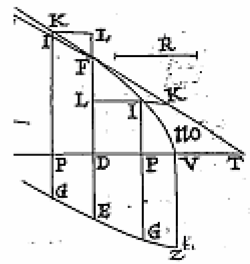
Rurſus accipiatur quodvis punctum I, infra punctum F, reliquáq; fiant, utì priùs; ſimilíque jam planè diſcurſu conſtabit fore L K × D E = P D E G ⊏ D P × D E, unde jam erit L K ⊏ D P, vel L I. E quibus liquidò patet totam rectam T K F K intra (ſeu extra) curvam V I F I exiſtere.

Iiſdem quoad cætera poſitis, ſi *ordinatæ* V Z, P G, D E, *&c.* continuè decreſcant, eadem concluſio ſimili ratiocinio colligetur; unicum obvenit *Diſcrimen*, quòd in hoc caſu (contra quàm in priore) linea V I F concavas ſuas axi V D obvertat.

Corol. Notetur D E × D T æquari ſpatio V D E Z.

(Barrow, 1670, p. 78)





(Barrow, 1670, p. 154)

> *Dada ZGE es una curva de la cual su eje es VD; y dada las ordenadas aplicadas a este eje, VZ, PG, DE, continuamente incrementada desde la ordenada inicial VZ; también dada VFI es una curva tal que, sí una línea recta EDF es dibujada perpendicular a VD, la cual corta a las curvas en los puntos E, F, y VD en D, el rectángulo contenido por DF y una longitud dada R que es igual a el espacio interceptado VDEZ; también dado DE : DF = R : DT, y uniendo TF. Entonces TF tocara a la curva VIF. (Figura 109).*
>
> *(Barrow, 1670, p. 78)*

Vemos en este párrafo como Barrow encuentra que hay una relación existente entre la ordenada de un punto de una curva, con respecto a el área bajo la curva que para el caso citado se trata del área comprendida por *VDEZ* y la recta tangente que toca a la curva *VIF* en la cual la *R* representa el área del espacio *VDEZ,* tal relación esta dada por: $\frac{DE}{DF}=\frac{R}{DT}$ en esta expresión existe una relación comprendida entre el área bajo la curva y la inclinación de la recta tangente, puesto que sí esta razón es grande esto implica que *DT* es pequeño con respecto de *R* lo cual nos da una idea de como va a ir cambiando la curva lo que nos deja que ver que para valores pequeños de cambio sobre el eje horizontal hay grandes cambios para las ordenadas de la curva *ZGE,* si por el contrario *DT* es grande en relación a *R,* esto significa que para grandes valores de cambio sobre el eje horizontal hay pequeños valores de cambio sobre el eje vertical con lo cual vemos que para esta situación la curva *ZGE* casi no crece, estas ideas no se hacen explícitas en la obra de Barrow, sin embargo se encuentran presentes.

Para algún punto I que es tomado de la de la curva VIF (primero sobre el lado de F cercano a V), y sí por ese punto esta IG que es formado una paralela a VZ que pasa por el punto I, y KL que es paralela a VD, cortando las líneas dadas como es mostrado en la figura; entonces LF: LK = DF: DT = DE: R, o $R \bullet LF = LK \bullet DE$.

(Barrow, 1670, p. 78)

Concluimos de estas expresiones matemáticas que efectivamente existe una relación evidente entre la inclinación de la recta tangente a la curva y el área comprendida bajo la curva ZGE, se utiliza también la propiedad de semejanza de triángulos.

Pero, la naturaleza del estado de las líneas DF, PK, tenemos $R \bullet LF = \text{área } PDEG$*; por lo tanto* $LK \bullet DE = \text{área}PDEG < DP \bullet DE$ *; por lo tanto LK<DP incluso LK<LI.*

Nuevamente, si el punto I es tomado del otro lado de F y la misma construcción es hecha como la anterior, de manera clara esto puede ser fácilmente mostrado que LK>DP, incluso LK>LI.

De lo cual es absolutamente claro que la línea TKFK toca a la curva AIFI o esta por debajo de ella.

(Barrow, 1670, p. 78)

En el párrafo anterior la idea de tangente a una curva es concebida por Barrow en donde deja ver a el lector que la recta tangente a la curva, la toca a esta en un punto, pero también deja a la curva por un lado de la recta tangente lo cual como sabemos no necesariamente tiene que ser así, por lo tanto a pesar de que hay ideas de tipo variacional que no se manifiestan (pero que están presentes) también vemos que hay ideas en donde todavía se maneja la perspectiva de los griegos de la antigüedad en donde la recta tangente a una curva toca a la misma en un solo punto dejándola de lado con respecto a la recta tangente.

Otras cuestiones restantes sobre la misma situación, si la ordenada VZ, PG, DE, continuamente disminuye, la misma conclusión se tiene con argumentos similares; solamente una distinción ocurre, a saber, en este caso, contrario a el otro, la curva AIFI es cóncava a el eje VD.

Corolario. Debe de ser notado que $DE \bullet DT = R \bullet DF = \acute{a}rea ADEZ$ *. (figura 110)*

(Barrow, 1670, pp. 78)

Barrow utiliza en su obra gráficas y argumentos de tipo geométrico en sus planteamientos, aunque también se empiezan a tratar argumentos de tipo variacional ya que se nota en la gráfica que hay una relación entre el área bajo la curva y la inclinación de la recta tangente a la curva que representa al área de la misma. En este ejemplo Barrow utiliza la tangente, para mostrar la relación existente entre área bajo la curva y la tangente de la recta que toca a la misma en un solo punto.

Comentarios finales referentes a lo tratado sobre las tangentes antes del desarrollo del Cálculo

Al revisar las ideas que manejaba Copérnico con respecto a la tangente, podemos ver como él ya sin saberlo utiliza ideas semejantes a las que posteriormente se obtendrían con respecto a los infinitesimales, posteriormente hay más pensadores matemáticos que utilizan a la tangente, la usan como una herramienta para resolver problemas de tipo geométrico, conforme va transcurriendo el tiempo empiezan a existir problemas para obtener máximos y mínimos, métodos para encontrar la tangente a una curva, podemos ver que algunos de ellos utilizaban argumentos de tipo infinitesimal, aunque no eran conscientes de ello, por ejemplo Fermat al encontrar los máximos y mínimos desaparece un ε que se encuentra presente en el planteamiento del problema o retomando a Copérnico que los arcos y sus subtensas se hicieran cada vez más y más pequeños. Hubo algunos otros que aunque no utilizaron argumentos de tipo variacional con la tangente sí la utilizaron como una herramienta básica para sus cálculos, todos estos personajes en el desarrollo de sus matemáticas utilizaban argumentos de tipo geométrico y gráfico, estando estas ideas presentes en los matemáticos del siglo XVII, Barrow comienza describir la relación existente entre el área bajo la curva y la recta tangente a un punto de la curva. Consideramos que con Barrow se inicia una transición entre ideas de tipo estático con ideas de tipo variacional que aunque el no lo hiciera explícito en su obra, ya estaban presentes esas ideas variacionales, opinamos que la humanidad estaba en proceso de poder concebir las ideas del Cálculo infinitesimal que posteriormente surgirían con otros dos grandes matemáticos como son: Newton y Leibnitz.

Estas ideas nos permiten verificar que el desarrollo del Cálculo en la humanidad ha pasado primeramente por aspectos de tipo geométrico y gráfico, que reconocemos está estrechamente vinculado a prácticas humanas, antes que formalizaciones expresadas por medio de fórmulas y desarrollos algebraicos.

Durante la formulación del Cálculo

Isaac Newton (1642 – 1727)

Newton llega a resolver un conjunto de problemas que se encontraban presente en su época, como son el problema de las tangentes, de los máximos y mínimos, la cuadratura de curvas, la relación existente entre la tangente y la cuadratura de una curva, problema que no había podido resolver su antecesor Barrow de quien fue discípulo.

En el estudio preeliminar del libro Principios Matemáticos en donde se encuentra expuesta la obra de Newton de Principios Matemáticos de Filosofía Natural se expone lo siguiente:

> *Precisamente eso harán los Principia: medir. Apoyado en su invención del cálculo, Newton demuestra que basta medir con verdadera precisión para hallar un factor causal antes oculto, como ya había expuesto Galileo. La medida rigurosa de un sistema suministra por transposición simple un nexo de necesidad que <<solicita>> una fuerza.*

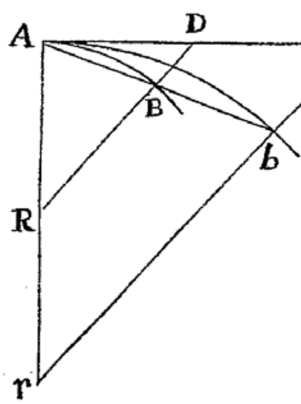
> *Sabiendo trazar tangentes a las curvas y hallar las áreas comprendidas por ellas, es posible adentrarse a la geometría con el mundo real y – sin inventar hipótesis – medir tiempos y espacios, masas y velocidades, hasta llegar a la ecuación fundamental. Es un arte de la medida lo que permite hacer frente a <<toda la dificultad de la filosofía […]: desde los fenómenos de los movimientos investigar las fuerzas de la Naturaleza, y desde esas fuerzas demostrar los otros fenómenos>>.*

Notas de A. Escohotado, Principios matemáticos, Isaac Newton, 1713
Traducción de Antonio Escohotado y M. Sáenz de Heredia, pp. XXVI

Notamos en el párrafo anterior la importancia que tenía la geometría y específicamente el trazar tangentes a las curvas, así como las áreas comprendidas por ellas ya que eso permitía relacionar a la geometría con el mundo real, que en ese entonces tenía mucho que ver con los movimientos de los cuerpos, en donde estaban involucradas elementos como son: fuerzas, masas, aceleraciones y tiempos, es interesante reflexionar sobre la frase "*un factor causal antes oculto*" así como la de: "*…hasta llegar a la ecuación fundamental.*" Desde nuestro punto de vista aquí se pueden observar intereses de la época en poder determinar causas y efectos, es decir el poder predecir estados futuros de fenómenos físicos de los cuales se les quería representar por medio de una ecuación la cual a su vez representaba figuras geométricas de la que también se estaba interesados en conocer su comportamiento en un instante dado.

Ahora vamos a observar algunos lemas expuestos en los Principios Matemáticos para ver cual es el manejo que Newton le daba a la tangente.

Sección I, Lema VI:



*Si cualquier arco **ACB**, en una posición dada, es subtendido por su cuerda **AB**, y en cualquier punto **A** situado en medio de la curvatura continua es tocado por una recta **AD** prolongada en ambos sentidos, si los puntos **A** y **B** se acercan el uno al otro y se encuentran, afirmo que al ángulo **BAD** contenido entre la cuerda y la tangente disminuirá hasta lo infinito, desapareciendo en última instancia.*

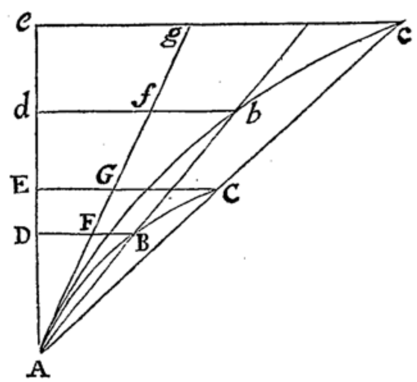
> *Porque si ese ángulo no desapareciese, el arco ACB contendría con la tangente AD un ángulo igual a algún ángulo rectilíneo y, por tanto, la curvatura en el punto A no será continua, cosa contraria a la hipótesis.*

Isaac Newton, 1713, Traducción de Antonio Escohotado, p. 64

Vemos que la idea de lo infinitamente pequeño que se encuentra presente y donde al llevarse acabo este proceso la cuerda subtendida tiende a ser la tangente a la curva en el punto A, encontramos también presente la idea del paso al límite ya que la tangente a la curva es el límite al que llegara la cuerda AB, en esta parte ya se tiene una definición desde un punto de vista geométrico y utilizando ideas de tipo variacional que se encuentran presentes cuando menciona si los puntos A y B se acercan el uno al otro y se encuentran, miramos también el uso que se hace de las figuras como un argumento necesario para dar las explicaciones ya que estas son hechas con base precisamente a ellas.

Revisaremos ahora otro lema enunciado en los Principios Matemáticos en donde se nos muestra como áreas curvilíneas serán iguales a las áreas rectilíneas sí es que dos puntos de la curva se aproximan indefinidamente:

Sección I, Lema IX



*Si una línea recta **AE** y una curva **ABC**, ambas con una posición dada, se cortan en un ángulo dado **A**; y a esa línea recta, en otro ángulo dado, se aplican ordenadamente **BD** y **CE** intersectando la curva en **B** y **C**; y los puntos **B** y **C** se aproximan y se encuentran en el punto **A**, afirmo que las áreas de los triángulos **ABD** y **ACE** serán respectivamente en última instancia como los cuadrados de los lados homólogos.*

*Pues mientras los puntos **B** y **C** se aproximan se aproximan hacia el punto **A**, supongamos siempre que **AD** es prolongada hasta los puntos remotos d y e, de manera que **A**d y **A**e pueden ser proporcionales a **AD** y **AE**; y que las ordenadas db y ec se trazan paralelas a las ordenadas **DB** y **EC**, intersectando **AB** y **AC** en b y c. Siendo semejante la curva **A**bc a la curva **ABC**, trácese la recta **A**g que toca ambas curvas en **A** y corta las ordenadas **DB**, **EC**, db y ec en **F**, **G**, f y g. Entonces, suponiendo que la longitud **A**e permanece idéntica, hágase que los puntos **B** y **C** se encuentren en el punto **A**. Al desaparecer el ángulo c**A**g, las áreas curvilíneas **A**bd y **A**ce coincidirán con las áreas rectilíneas **A**fd y **A**ge, y por tanto (según el lema V) guardarán entre sí la razón de los lados **A**d y **A**e al cuadrad. Pero las áreas **ABD** y **ACE** son siempre proporcionales a* *esas áreas, tal como lo son los lados **AD** y **AE** a esos lados. Y, en consecuencia, las áreas **ABD** y **ACE** serán respectivamente en última instancia como los cuadrados de los lados **AD** y **AE**. Q.E.D.*

(Newton, 1713, pp. 66 – 67)

Ahora Newton utilizando argumentos de área y proporcionalidad entre triángulos semejantes, así como de curvas semejantes, muestra que curvas semejantes tienen la misma tangente, donde esta última idea es similar a la vista anteriormente ya que hay puntos que se aproximan y se encuentran en un determinado punto, sin embargo cabe hacer notar aquí la generalización a la que se tiende hacer, ya que a curvas semejantes se tiene la misma tangente, recordemos que Newton va a utilizar todos estos argumentos para describir movimientos de cuerpos en general, así como de cuerpos celestes, específicamente las trayectorias de los planetas alrededor del sol, las cuales son elípticas, y en general le va a servir para describir movimientos de los cuerpos, los cuales pueden ser trayectorias circulares, elípticas, parabólicas, e hiperbólicas y el conocimientos de las tangentes a las curvas en ciertos puntos auxiliara para conocer las fuerzas que se encuentran presentes en los cuerpos que se mueven con las trayectorias indicadas.

Vemos que entonces ahora que la tangente es la misma para curvas semejantes, con lo cual se puede encontrar métodos generales para conocer movimientos de los cuerpos que se mueven con trayectorias similares.

En el libro tratado de métodos y series de fluxiones escritas con los apuntes de Newton pero posteriores a su muerte, se observa que en esta obra se le dedica una buena parte a encontrar la tangente de varias curvas mediante diferentes métodos en donde utiliza las fluxiones.

Citaremos tan solo un caso en donde se muestra un método para encontrar la tangente de una curva en un punto dado.

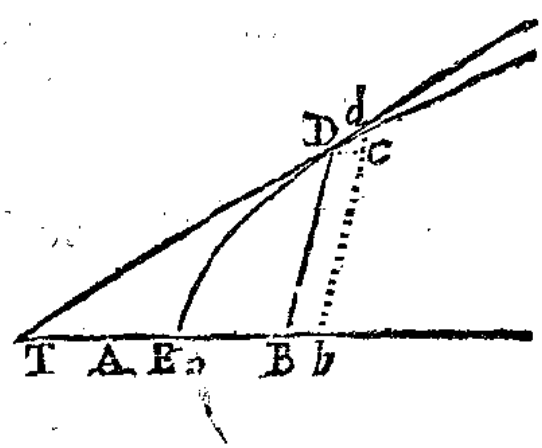
PROBLEMA 4

TRAZAR LAS TANGENTES DE LAS CURVAS

MÉTODO 1

Las tangentes se trazan de varias formas, según las relaciones de las curvas con las líneas rectas. En primer lugar sea la línea recta BD de modo que forme un ángulo con otra línea recta AB, tomada como base, y que sea ordenada en la curva ED. Muévase esta ordenada un espacio infinitamente pequeño hacia la posición bd, de modo que ésta incrementa con el momento cd mientras AB incrementa por el momento de Bb, que es igual Dc. Ahora prolónguese Dd hasta que encuentre a AB en T; ésta cortará a la curva en D o en d, y los triángulos dcD y DBT serán semejantes, por lo que TB: BD = Dc: cd.

Cuando la relación de BD a AB es exhibida a través de una ecuación que determine a la curva, se busca, por el problema 1, la relación entre las fluxiones, y se toma TB a BD en la misma razón de la fluxión de AB a la fluxión de BD; entonces TD tocará a la curva en D.



Ejemplo1. Si se llama x a AB y y *a BD, sea su relación*

$$x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$$

La relación entre las fluxiones será

$$3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^3 + a\dot{y}x = 0$$

Y así

$$\dot{y} : \dot{x} = 3x^2 - 2ax + ay : 3y^2 - ax = BD\ (o\ y){:}BT.$$

Por lo tanto

$$BT = \frac{3y^3 - axy}{3x^2 - 2ax + ay}$$

Por consiguiente, dado el punto D, y entonces DB y AB, o y y x, estará dada la longitud BT por la cual está determinada la tangente TD.

Isaac Newton, 1671, Traducción de Iztaccíhuatl Vargas
Edición en español, 2001, p. 121

Vemos que Newton maneja ideas de lo infinitamente pequeño, además notamos también como la razón existente en el triángulo *DBT* que es semejante con el triángulo infinitamente pequeño *dcD*, (ambos formados con ayuda de la tangente) sigue presente, tal y como los menciona en Los Principios Matemáticos en donde se refiere a la razón última de las cantidades evanescentes. Notamos también que hay ideas muy parecidas a las del Cálculo actual, ya que como sabemos al evaluar la derivada en un punto de una curva, esto equivale a calcular la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto, si decimos que: $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ y comparamos con la expresión anterior, la cual puede ser rescrita como: $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{BD}{BT}$ en ambas expresiones se maneja la misma idea con respecto a triángulos formados con la tangente de una curva y es que el triángulo formado por segmentos infinitesimales guarda la misma razón que aquel que es formado por la tangente con respecto a un punto dado.

Observamos que Newton maneja argumentos de tipo geométricos ya que habla de semejanza de triángulos, así como la tangente a una curva, el dibujo mostrado es una herramienta indispensablemente necesaria para poder dar las explicaciones pertinentes, la tangente aquí juega un papel importante ya que sin ella prácticamente no se podría dar la explicación en este contexto geométrico.

A continuación presentamos un artículo de Internet[4] donde se muestra como Newton encuentra la relación entre la tangente y la cuadratura de una curva:

De Analysi.

Esta monografía circular de 1669 que mandó Newton a sus amigos y que fue publicado mucho después en latín en 1711 contiene ya las ideas esenciales del cálculo de Newton. Empieza dando unas reglas para calcular cuadraturas tal como se ve en la imagen de la primera página de esta publicación:

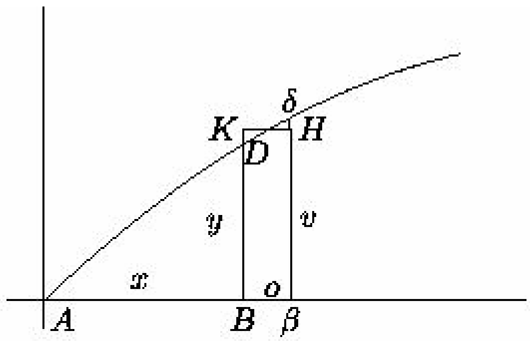
$$Regla1 \qquad Si. \quad ax^{m/n} = y \qquad Erit \ \frac{an}{m+n} x^{\frac{(m+n)}{n}} = AreaABD$$

Más tarde en el mismo tratado da un procedimiento para hallar la ordenada de una curva cuya cuadratura ABD está dada. El proceso es interesante ya que es de alguna forma el comienzo del cálculo diferencial e integral y donde se ve el papel inverso que juegan la diferenciación y la integración. Lo explica con un ejemplo, aunque es claramente generalizable.

De acuerdo con la figura sean z=área (ABD), y=BD, x=AB, $B\beta = o$. Elijamos ahora v=BK de tal manera que:

$$\text{área } (BD\delta\beta) = \text{área}(BKH\beta) = ov.$$

[4] http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/histmatem/calculo/calculo.html



Consideremos por ejemplo la curva para la cual:

$$z = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

para facilitar los cálculos, elevamos al cuadrado la relación anterior para obtener $z^2 = (4/9)x^3$*. Por la elección que hemos hecho de v también se tiene:*

$$(z+ov)^2 = \frac{4}{9}(x+o)^3$$

Esto es:

$$z^2+2zov+o^2v^2 = \frac{4}{9}(\mathrm{x3}+\mathrm{3x2o}+\mathrm{3xo2}+\mathrm{o3})$$

Simplificando $z^2 = 4/9x^3$ *en cada lado de esta expresión y dividiendo por o queda:*

$$2zv+ov^2 = \frac{4}{9}(\mathrm{3x2}+\mathrm{3xo}+\mathrm{o2})$$

Newton toma ahora $B\beta$ *infinitamente pequeño. De la figura se observa entonces que* $v=y$*, y que los términos que contienen o se anulan, de donde:*

$$2zy = \frac{4}{3}x^2$$

Sustituyendo ahora el valor de z, resulta finalmente $y=x^{1/2}$

Como vemos se tiene inicialmente el área bajo la curva y al derivar la expresión que representa a dicha área y evaluar esta derivada en $x = B$ se ve que la derivada y la integral son procesos inversos.

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 – 1716)

Otro gran pensador de la época y quien por su parte también es responsable de la formulación del Cálculo Diferencial e Integral, también encuentra un método general para determinar las rectas tangentes a las curvas.

En el libro el Cálculo infinitesimal de la Editorial Balsal, de la colección de la aventura de la ciencia, aparece una traducción del trabajo de Leibniz de 1684, de el transcribimos algunos fragmentos en donde se nota como trabajaba con las tangentes:

> *Dado el eje AX y varias curvas VV, WW, YY, ZZ, llamemos x al segmento AX del eje y, v, w, y, z respectivamente, las ordenadas normales al eje VX, WX, YX, ZX. Sean VB, WC, YD, ZE las tangentes que cortan, respectivamente, al eje en los puntos B, C, D, E.*
>
> *Sea dx un segmento arbitrario y dv (o dw, o dy, o dz), o sea las diferencias de las mismas v(o w, o y, o z), un segmento que es a dx como v(o w, o y, o z) es a BX (o CX, o DX, o EX). Esto admitiendo, las reglas del cálculo son:*
>
> *Si a es una cantidad constante dada, será da = 0; y dax = adx. Si y = v (es decir, si una ordenada cualquiera de la curva YY es igual a una ordenada cualquiera correspondiente de la curva VV), será dy = dv.*

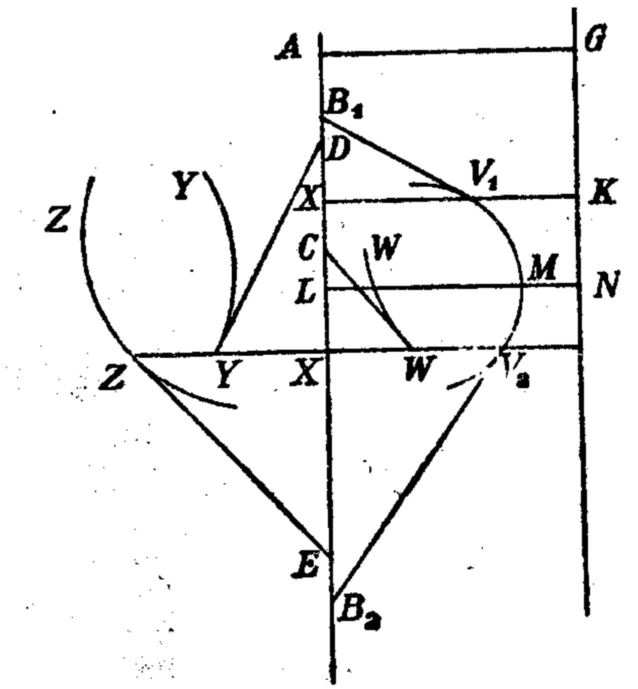


Fig. 6

(Leibniz, 1684, p. 41)

Por supuesto era evidente para Leibniz que sí se tiene una cantidad constante, entonces no hay cambio y la diferencial vale cero, así como en el caso de que las curvas sean iguales sus cambios (diferenciales son iguales), vemos también como las tangentes sirven para dar puntos de referencia como *B, C* o *E* con los cuales se obtienen relaciones entre los diferenciales y los segmentos *BX* (o *CX*, o *DX*, o *EX*).

Se sigue posteriormente enunciando otras reglas:

> *Adición y sustracción: si se tiene z – y + w + x = v, será d (z – y + w + x) = dv =d z – dy +d w +dx.*
>
> *Multiplicación:* $d(xv) = xdv + vdx$*, es decir, si* $y = xv$*, será* $dy = xdv + vdx$*. De ahí que es indiferente utilizar la expresión* xv *o por brevedad, una sola letra como y. Debe de observarse que en este cálculo se tratan igualmente x y dx, como y* y *dy, o cualquier otra letra indeterminada y su diferencial. También debe observarse que no siempre puede*

darse el procedimiento inverso a partir de una ecuación diferencial, si no con cierto cuidado del que luego se hablará.

División: si $z = \frac{v}{y}$ *se tendrá* $d\frac{v}{y} = dz = \frac{\pm vdy \mp ydv}{y^2}$ *en cuanto los signos, debe observarse lo siguiente: cuando simplemente se sustituye a la letra su diferencial, se deben conservar los mismos signos iguales y escribir +dz en lugar de +z y –dz en lugar de –z, como ocurre con la adición y sustracción expuestas antes. Más cuando se llega a la discusión de los valores o cuando se considera la relación de z con x, se debe considerar entonces si dz es una cantidad positiva o menor que cero, es decir, negativa; en este último caso, la tangente ZE se dirige desde Z no hacia A, sino en sentido contrario, es decir, debajo de X, y eso ocurre cuando las ordenadas z decrecen cuando crecen las x.*

(Leibniz, 1684, p. 42)

En esta apartado percibimos que se le da un signo a los diferenciales lo cual tiene que ver con la inclinación de la recta tangente, esta idea esta relacionada a su vez con el crecimiento y decrecimiento de la curva, las explicaciones que se dan requieren que el lector analice la gráfica. Posteriormente se sigue comentando acerca de lo mismo, pero también se habla acerca de los máximos y mínimos para lo cual también se utiliza a la tangente para poder justificar las explicaciones que se dan acerca de ellos:

Y como las mismas ordenadas v a veces crecen, a veces decrecen, dv será una cantidad a veces positiva, a veces negativa… Ni en un caso ni el otro se presentan en el punto intermedio M, donde v no crece ni decrece, sino se mantiene estacionaria, y por lo tanto dv=0, sin que importe que la cantidad sea positiva o negativa, pues +0=-0. En ese lugar la v, es decir, la ordenada LM, es máxima (si su convexidad se dirigiera hacia el eje, sería mínima) y la tangente a la curva en M no se dirige por encima de X hacia A, es decir, acercándose al eje, ni debajo de X en sentido contrario, sino que resulta paralela al eje…Si dv y dx son iguales, la tangente forma con el eje un ángulo semirrecto.

(Leibniz, 1684, p. 43)

En el párrafo anterior se muestra el uso que se le da a la tangente para poder determinar los máximos y mínimos, nos dice que la tangente es paralela al eje y eso se da cuando en un instante de la curva la $dv = 0$, es decir cuando v no crece ni decrece, lo cual evidentemente tiene que ver con la inclinación de la recta tangente, aquí también se nos muestra que la relación entre los diferenciales nos indica la inclinación de la recta tangente de manera implícita también se encuentra la idea presente de que esa inclinación depende de la relación entre los diferenciales y al ser los diferenciales cantidades infinitesimales se encuentra la idea de como cambia una cantidad con respecto a otra en un preciso instante, en términos actuales estaríamos hablando del valor de la derivada evaluada en un punto, el cual esta dado por la pendiente de la recta tangente a la curva. Posteriormente se deduce la regla de la potencia y después se hace el siguiente comentario:

> *En verdad, hubiera sido suficiente la regla de la potencia entera para poder determinar las diferenciales, tanto de las fracciones como de las raíces; en efecto, la potencia se convierte en fracción cuando el exponente es negativo, y se transforma en raíz cuando el exponente es fraccionario; pero he preferido deducir por mi cuenta estas consecuencias antes que otras las dedujeran, ya que son bastante generales y aparecen a menudo, y en un argumento, por sí mismo complicado, es preferible acudir a la facilidad.*
>
> *A través del conocimiento de este algoritmo particular, que llamo cálculo diferencial, todas las otras ecuaciones diferenciales pueden obtenerse mediante el cálculo común, como así los máximos y mínimos y también las tangentes…*
>
> *(Leibniz, 1684, pp. 44-45)*

Es precisamente esta forma de resolver los problemas entre ellos el de las tangentes con el nuevo método llamado Cálculo, el cual sirvió no solo para resolver este problema sino más bien un conjunto de problemas como el de las cuadraturas, máximos y mínimos, entre otros, de tal forma que todos las formas particulares de resolución de problemas (relacionados con procesos infinitesimales) fueron sustituidas por el método general encontrado en el Cálculo. Posteriormente se sigue describiendo en el trabajo de Leibniz ahora como se concibe geométricamente a la tangente y la relación que guarda esto con los diferenciales:

… basta recordar en general que determinar la tangente es trazar una recta que una dos puntos que están a una distancia infinitamente pequeña o prolongar el lado de un polígono infinitángulo que para nosotros equivale a la curva. Esta distancia infinitamente pequeña puede siempre conocerse mediante alguna diferencial como dv, o puede expresarse por medio de una razón con ella, a través de una cierta tangente conocida.

(Leibniz, 1684, p. 46)

Vemos en lo anterior la relación existente entre un argumento de tipo geométrico con el diferencial y un segmento infinitesimal; actualmente en el ámbito escolar a las curvas o funciones no se les concibe como formados por conjuntos de segmentos infinitesimales, todo esto nos sirve para ver también a la tangente como algo que nos ayuda a caracterizar a la curva en un instante dado ya que en una región muy pequeña la curva y la tangente son la misma cosa y al revisar las características de la tangente estamos también viendo las características de la curva en un segmento infinitesimal.

En un artículo de Castañeda (2006) se aborda el tema de máximo, expuesto por Leibniz (1684) en donde se comenta:

Leibniz (1684) hace una amplia descripción del comportamiento infinitesimal, en que se caracteriza al máximo por un mismo argumento geométrico, usando dos diferentes criterios. El primero, a través de la comparación de estados, donde precisa que el máximo queda determinado por la línea GF (ubica la mayor de las ordenadas de todas las posibles; obsérvese que en la imagen aparecen otras dos ordenadas CD y LN). El segundo a través de una condición geométrica, explica que la tangente sobre la curva en el punto máximo es paralela al eje de las abscisas (Figura1).

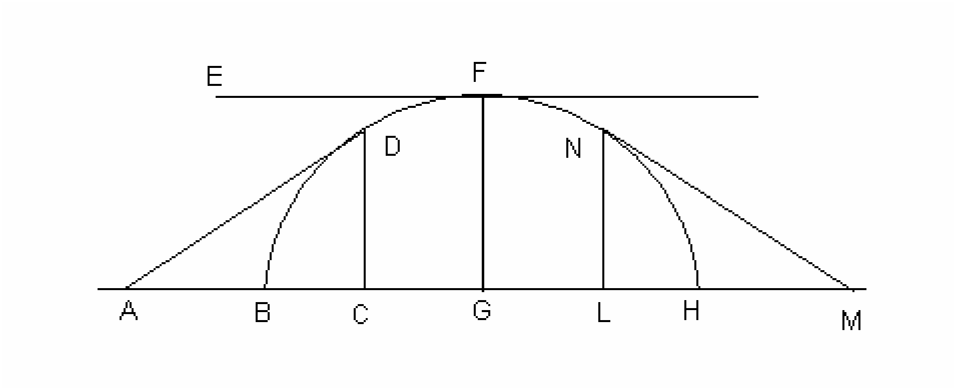


Figura 1

Más adelante, aborda una caracterización a través del método algebraico de las diferencias.

(Castañeda, 2006, p. 258)

Al revisar lo anterior podemos verificar el uso que se le da a la tangente como argumento de tipo geométrico para poder determinar el máximo de una función, y la relación que guarda este con el método algebraico de las diferencias en el punto máximo con respecto al eje de las ordenadas es igual a cero.

Comentarios finales del periodo considerado durante la formulación del Cálculo

Podemos decir que en cuanto a la concepción que se tenia con respecto a la recta tangente de Newton y Leibniz la idea esencial prácticamente es la misma, aunque con diferente nomenclatura ya que mientras Newton considera a la tangente de la curva en un punto dada por la relación: $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, estamos hablando del cociente entre las fluxiones, en donde sabemos que las fluxiones es la velocidad con la que cambian las fluentes para valores infinitamente pequeños del tiempo, Leibniz concibe a la recta tangente como: $\frac{dy}{dx}$ ahora se esta hablando de un cociente entre diferenciales, es decir cantidades infinitamente pequeñas, con ambos métodos podemos saber cuanto cambia una variable con respecto a otra en un instante, como estamos hablando de un instante, entonces se encuentra la idea de que esta tangente va a ser cambiante. También hacemos notar aquí que tanto Newton como Leibniz se percataron del proceso inverso entre las rectas tangentes y las cuadraturas.

Anteriormente a la formulación formal del Cálculo existía una serie de problemas como es la determinación de la tangente de una curva, máximos y mínimos, cuadraturas, entre otros, cada uno de los problemas existentes tenía métodos particulares de resolución, de tal forma que existían varios métodos para resolver diversos problemas, el Cálculo viene a ser un método integrador de resolución de un conjunto de problemas por un solo método general, vemos entonces que desde los orígenes del Cálculo se encontraba presente el problema de la tangente a una curva, así como el de los máximos y mínimos; como sabemos en esa época había un estrecho vinculo entre la geometría y la física, ya que las curvas geométricas podían representar movimientos de cuerpos o posiciones de cuerpos celestes, de tal forma que al poder determinar las propiedades de una curva, también se estaban determinando propiedades en modelos representativos de la física, con respecto a la tangente de una curva, esta toca a la misma en un solo punto (localmente), de tal forma que la tangente y la curva son una misma en un segmento infinitesimal, como la curva es cambiante, la tangente también lo es, de hecho es en esta época donde la tangente adquiere su carácter variacional, ya que es precisamente con Newton y Leibniz que se comienza a trabajar, con las fluxiones y los diferenciales respectivamente, que son ideas de tipo variacional, que surgen a partir de la física y geometría. Newton utiliza argumentos de tipo geométrico para explicar la recta tangente a la misma en donde se utilizan ideas de tipo infinitesimal, cuando Newton muestra un método para encontrar la tangente de una curva, se auxilia de gráficas para dar explicaciones de tipo analíticas, el también desarrolla métodos de derivación e integración; Leibniz por su parte utiliza el Cálculo, y hace un análisis de los diferenciales, encontrando un conjunto de reglas para poder operar con ellos, determinando un algoritmo, que simplifica los cálculos; para el desarrollo de sus ideas utiliza argumentos geométricos los cuales los ocupa con los diferenciales, utiliza también a la tangente como una herramienta fundamental para poder determinar los máximos y mínimos de una curva.

El discurso en ese entonces maneja ideas de tipo geométrico, las fluxiones o diferenciales, y la tangente esta fuertemente ligada al nacimiento formal del Cálculo, de hecho como sabemos actualmente la función derivada evaluada en un punto corresponde el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto, además se hace un análisis de las curvas mediante las ecuaciones que las representan para representar mediante una expresión matemática la tangente de una curva, es notablemente importante el carácter variacional que adquiere la tangente en esta época del Cálculo, sin embargo podemos decir que el análisis de las curvas empezaría mas bien a ser el análisis de funciones, necesitaba de un mayor formalismo ya que las ideas presentes acerca de los infinitesimales no descansaban sobre bases firmes, se requería un mayor formalismo matemático y para lograrlo las ideas de tipo geométrico por sí solas eran insuficientes para tal propósito.

Análisis de textos que aparecen después de la formulación del Cálculo y cuya finalidad es la difusión del Cálculo a ambientes no eruditos

Obra de L´Hospital, Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas

Inicialmente en esta obra se definen lo que son cantidades constantes y variables, se menciona también sin definir de manera explícita infinitamente pequeño, se menciona o define lo infinitamente pequeño a través de una representación geométrica, por ejemplo en la Definición II de la primera sección se dice:

> *Sea AMB, por ejemplo, una línea curva cualquiera que tiene como eje o diámetro a la línea AC y como una de sus ordenadas a la recta PM [fig. 1], y sea pm otra ordenada* ***infinitamente*** *cercana a la primera*

(L´Hospital, 1696, p. 28)

En este texto se habla de lo infinitamente pequeño sin definirlo, posteriormente en el 1er. Postulado de la sección se da una intuición de lo que es infinitamente pequeño desde una perspectiva geométrica, ya que se dice por ejemplo:

> "*Se pide que se pueda tomar indistintamente una por la otra a dos cantidades que no difieren entre sí más que por una cantidad infinitamente pequeña*" en donde se hace referencia a cantidades representadas geométricamente en una figura, posteriormente se enuncia "*Se requiere, por ejemplo, que se pueda tomar a Ap por AP; pm por PM;*

(L´Hospital,1696, p. 29)

En la frase anterior y así de manera similar se muestra como aproxima un segmento a otro o un pequeño arco a otro pos ser infinitamente cercanos o próximos entre sí, estas consideraciones están presentes a lo largo de la obra, algunas ideas que se manejan con respecto a la tangente son las siguientes:

En la sección II, se da la siguiente definición:

> *Si se prolonga uno de los pequeños lados Mm de la poligonal [fig. 2] que compone a una línea curva, este pequeño lado, así prolongado, será llamado la tangente de la curva en el punto M o m.*

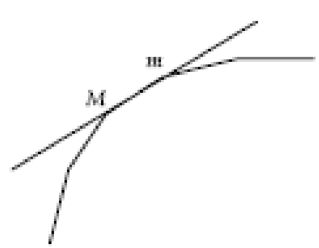


Fig. 2

(L´Hospital, 1696, p. 41)

En este caso se considera que una línea curva es una poligonal compuesta por lados infinitamente pequeños, de tal forma que al extender uno de ellos se tiene a la tangente de la curva en el punto tratado, que en el caso mostrado puede ser M o m ya que al estar infinitamente próximos entre sí se puede tomar indistintamente uno por otro, esta definición la utiliza posteriormente para poder encontrar la tangente de una curva en un punto dado en donde al estar dos puntos infinitamente cercanos uno de otro sobre el eje de las x, esta proximidad la representa por ***dx*** y de forma similar sucede con el eje y de tal forma que se tiene ahora un ***dy***, nos percatamos que esta interpretación hace uso de un argumento de tipo visual, y se maneja una idea intuitiva de lo que es la recta tangente, además si adoptáramos esta definición de recta tangente se observa de manera natural como la tangente es variable ya que va a ir correspondiendo a las diferentes segmentos infinitamente pequeños que son los diferentes lados de la poligonal.

En la sección III del libro se toca el tema de los máximos y mínimos

En esta sección del libro se define lo que son los máximos y mínimos en la Definición I

Definición I

Sea MDM una línea curva cuyas ordenadas PM, ED y PM sean paralelas entre sí, y tal que al incrementarse continuamente la abscisa AP, la ordenada PM crece también hasta cierto punto E después del cual disminuye; o por el contrario, que disminuye hasta cierto punto después del cual crece. Supuesto eso: la línea ED será denominada la mayor o la menor ordenada

Definición II

Si se propone una cantidad PM la cual esta compuesta de una o de varias indeterminadas AP, de modo que al crece AP continuamente esta cantidad PM también crece hasta cierto punto E, después del cual disminuye, o al contrario; y que se requiere encontrar para AP un valor AE tal que la cantidad ED a la cual compone sea mayor o *menor que cualquier otra cantidad PM formada análogamente por AP. Eso se llama un problema de máximos y mínimos [De maximis & minimis].*

En las explicaciones que encontramos posteriormente se puede observar argumentos de tipo variacionales con ayuda de elementos visuales (gráfica), estas explicaciones sirven como argumento para caracterizar los cambios que van teniendo las curvas alrededor de los máximos y mínimos, es decir antes durante y después de ellos. A continuación en la obra de L´Hospital se menciona una proposición general y una explicación que desde de nuestro punto de vista tiene argumentos variacionales:

Proposición general

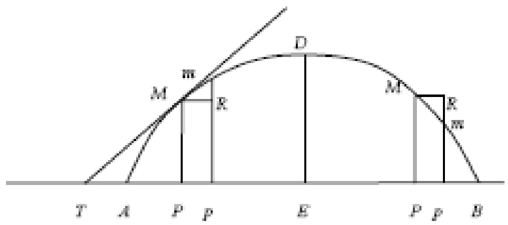
&46. Dada la naturaleza de la línea curva MDM, encontrar para AP un valor AE tal que la ordenada ED sea la mayor o la menor de todas las PM análogas.

Si al crecer AP, PM también crece, es evidente que su diferencia Rm será positiva con relación a la de AP; y que por lo contrario, cuando PM disminuya al crecer la abscisa AP, su diferencia será negativa.

(L´Hospital, 1696, p. 92)

En la explicación anterior podemos observa que se habla de crecimiento y disminución cuando la abscisa crece, en términos actuales podemos decir que se trata de regiones de la función en donde esta es creciente o decreciente. A continuación dice:

Luego, toda cantidad que crezca o disminuya continuamente no puede convertirse de positiva en negativa si no pasa por infinito o por cero; a saber por cero cuando primero va disminuyendo, y por infinito cuando primero va aumentando. De donde se sigue que la diferencia de una cantidad que expresa un máximo [plus grand] o un mínimo [moindre] debe de ser igual a cero o a infinito.



(L´Hospital, 1696, pp. 92 - 93)

Con base a lo anterior decimos, explicándolo en términos actuales que la tangente cambia de signo al estar antes y después de un punto crítico, y en los puntos críticos vale cero o infinito. Tenemos por lo tanto dos explicaciones con respecto a el carácter variacional de la tangente de una curva, una que se refiere a donde es creciente o decreciente y otra que nos muestra como en los máximos y mínimos la tangente cambia de positiva a negativa pasando entre estos cambios por cero o infinito.

Posteriormente dice:

> *Luego, dada la naturaleza de la curva MDM, se encontrará un valor de Rm, el cual al igualarse primero a cero y después al infinito, servirá para descubrir el valor buscado de AE en una o en la otra de estas suposiciones.*

(L´Hospital, 1696, p. 93)

En el párrafo anterior notamos que expone un método para encontrar los máximos y mínimos. De tal forma que la tangente se puede utilizar como una herramienta para encontrar los máximos y mínimos. Estas explicaciones utilizan las gráficas como apoyo visual para el lector comprenda los conceptos.

Notamos que efectivamente que el signo de la tangente dinámica nos indica sí la función es creciente o decreciente y por otro lado el verificar los cambios de signo en la tangente dinámica son cuando esta pasa por cero o por infinito, esta es una característica de la tangente vista esta como función.

Sección IV

Uso del Cálculo de las diferencias para encontrar los puntos de inflexión y de retorno.

En esta sección se explica las segundas diferencias, así como diferencias de orden mayor, como a continuación se muestra:

Definición 1

La porción infinitamente pequeña en la que aumenta o disminuye continuamente la diferencia de una cantidad variable es llamada la diferencia de la diferencia de esta cantidad, o bien su segunda diferencia. De este modo, si se concibe una tercera ordenada nq infinitamente cercana a la segunda mp [fig. 46]y si se trazan mS paralela a AB y mH paralela a RS, se llamará a Hn la diferencia de la Diferencia Rm, o bien la segunda diferencia de PM.

Igualmente, sí se concibe una cuarta ordenada of infinitamente cercana de la tercera nq, y si se trazan nT paralela a AB y nL paralela a ST, se llamará a la diferencia de las pequeñas rectas Hn y Lo la diferencia de la segunda diferencia, o bien la tercera diferencia de PM. Y así sucesivamente.

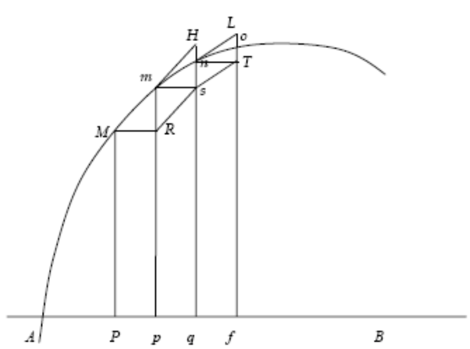


Fig. 46

(L´Hospital, 1696, p. 115)

Vemos aquí también explicaciones de tipo variacional (con apoyo visual), ya que al ver como cambian las diferencias (segundas diferencias, terceras, etc.) se esta observando no solo cuanto cambia la variable sino también como cambia.

Posteriormente se dan más elementos en el Corolario 1 de la obra con lo cual se podría determinar incluso el grado de un polinomio, pero también se puede ver como de un punto a otro infinitamente cercano hay cambios y podemos caracterizarlos a partir de las diferencias de las diferencias.

Corolario I

&62. Si se llama a x a cada una de las abscisas AP, Ap, Aq y Af; y a cada una de las ordenadas PM, pm, qn y fo, y a cada una de las porciones de las curvas AM, Am, An, y Ao, es claro que dx expresará las diferencias Pp, pq y qf de las abscisas; dy de las diferencias Rm, Sn y To de las ordenadas; y du las diferencias Mm, mn y no de las porciones de la curva AMD. Ahora bien con el fin de tomar, por ejemplo, la segunda diferencia Hn de la variable PM, es necesario concebir sobre el eje dos partes pequeñas Pp y pq, sobre la curva otras dos Mm y mn para tener las dos diferencias Rm y Sn; y por lo tanto, si se supone que las pequeñas partes Pp y pq sean iguales entre sí, es claro que dx será constante…

(L´Hospital, 1696, pp. 116 – 117)

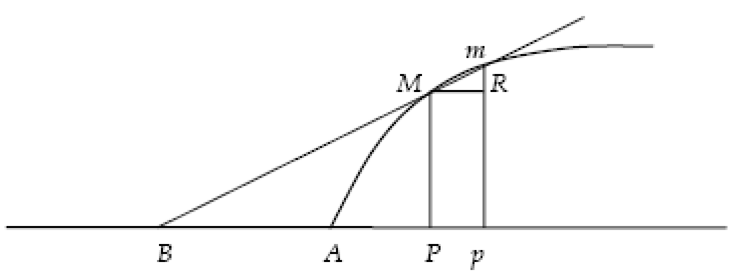
Nos percatamos que a partir del análisis de las diferencias se puede determinar como se comportan estas, con esta información sobre sí son las segundas diferencias las que se mantienen constantes o las terceras o cuartas, etc. Podemos determinar el orden del polinomio al que pertenecen.

Institutioni Analiche de María Agnesi, publicado en 1748

Para hacer el análisis de este texto se hará uso de la tesis Doctoral de Apolo Castañeda, Castañeda (2004); en su capítulo VII se hace un análisis epistemológico.

El análisis que hace el autor de la obra referida nos muestra que María Agnesi, utiliza ideas tanto de Newton al referirse a las fluxiones, como a Leibniz con la nomenclatura de la que hace uso en las diferencias infinitesimales, notamos que el tema de la tangente ocupa un lugar importante en la obra ya que de hecho el tema es tratado en el capítulo II del tomo de Cálculo Diferencial, titulado: "Capítulo II Del método de las tangentes", en el análisis que se hace del capítulo I titulado: "De la idea de diferencial de diverso orden y del cálculo del mismo" ya se hace referencia a la tangente, en el se menciona:

> *Utilizando este mismo acercamiento dinámico, explica la naturaleza de las cantidades infinitamente pequeñas; dada la abscisa AP, al dejarla fluir por un instante produce una porción infinitesimal Pp, e cual es llamado diferencia o fluxión de AP.*
>
> *Esta explicación se asemeja a las argumentaciones de Newton para fundamentar su cálculo;… respecto a los momentos dice que son principios nacientes de cantidades finitas. Estos momentos son magnitudes infinitesimales y corresponden a nuestros diferenciales actuales.* [En (Cantoral, 1983)].



(Agnesi, 1748, pág. 433)

> *Para determinar una diferencia infinitesimal, Agnesi emplea una representación gráfica usando la ya conocida relación establecida entre dos triángulos, uno de dimensiones finitas y otro de dimensiones infinitesimales. Dice que una vez determinada la variación de P, es decir el punto p, es posible trazar las paralelas PM y pm, si se traza la cuerda mM se determina el punto B, por otro lado, si se traza la recta MR paralela a AP, se observan dos triángulos, el BPM y el MRm cuya relación está dada por*

BP:PM::MR:Rm. En esta relación geométrica la cuerda Mm no se distingue del arco infinitesimal y pueden tomarse indistintamente uno por el otro.

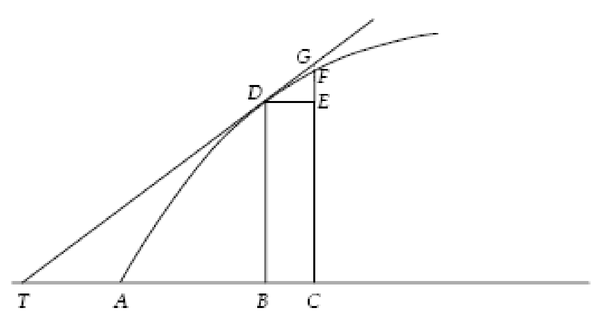
(Castañeda, 2004, p. 148)

Al revisar el texto anterior vemos que la idea de tangente variacional se encuentra presente cuando habla de las fluxiones, ya que estas son magnitudes variables que al dejarlas fluir por un instante se producen las magnitudes infinitesimales o fluxiones, como sabemos la tangente se encuentra dada por el cociente $\frac{dy}{dx}$, según la nomenclatura de Leibniz que es además la que utiliza Agnesi en su obra, se utilizan también argumentos de tipo geométrico al establecer la semejanza entre triángulos pero a su vez también se emplean ideas como el que una cuerda se convierte en la curva misma al considerarse un arco infinitesimal, con lo cual también se vuelve a considerar la idea de tangente como aquella establecida como la prolongación de uno de los segmentos infinitesimales por los cuales esta compuesto la curva.

A continuación transcribimos parte del estudio al capítulo II donde Castañeda expone su análisis sobre el cálculo de la tangente del libro de Agnesi:

Estudio al capítulo segundo; donde se estudia el método para el cálculo de la tangente

El capítulo II titulado Del método de las tangentes trata sobre el estudio de la construcción de una recta tangente a un punto sobre la curva, a partir de hallar previamente la recta subtangente. Este método, tiene mucha semejanza con la desarrollada por L´Hospital. Su explicación se basa en un dibujo geométrico.



Sea la curva ADF y además una tangente TDG en un punto cualquiera sobre la curva. Se asume que la ordenada BD es perpendicular a AB en el punto B, además que la ordenada CF está infinitamente próximo a la ordenada BD. Al prolongar CF, su intersección con la tangente determina el punto G, determinamos que GF será infinitamente pequeño respecto a EF por consiguiente se pueden considerar indistintamente a EF y EG, al igual que DF y DG. De esta forma se distinguen; AB=x, BD = y, ***y*** *por el argumento anterior EF = EG = dy,* ***y*** *también a* $DF = DG = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ *. Así se determina los triángulos semejantes GED, DBT los cuales conducen a la siguiente relación GE : ED :: DB : BT, <<términos analíticos>> como dice Agnesi, se tiene dy : dx :: y : BT, por consiguiente* $BT = \frac{ydx}{dy}$*, lo que determina la fórmula general de la subtangente para cualquier curva.*

(Castañeda, 2004, pp. 159-160)

Se nos muestra un método en donde se hace uso de la concepción de las cantidades infinitamente pequeñas, de tal forma que se puede sustituir un segmento por otro que sea infinitamente próximo a el, también se hace uso de la semejanza de triángulos, y finalmente se calcula la subtangente, con lo cual se puede trazar la tangente, notamos el carácter importante que tiene el poder calcular la tangente a una curva ya que inclusive se formulan estrategias, ahora ya con la ayuda de los infinitesimales (del cálculo), la idea de tangente variacional se encuentra implícita ya que la tangente y/o subtangente dependen de la relación entre los infinitesimales ***dx y dy*** esta relación es diferente en cada punto de la curva, aunque esto último ya no se hace explícito, sin embargo es una idea que se encuentra presente, por otro lado vemos también que en este libro cuya intencionalidad es la de difusión del saber, utiliza argumentos geométricos auxiliados de las gráficas para mostrar al lector de una forma clara sencilla y evidente los argumentos que utiliza.

Posteriormente en el análisis nos muestra la concepción que tenia Agnesi con el comportamiento de las curvas en el siguiente párrafo:

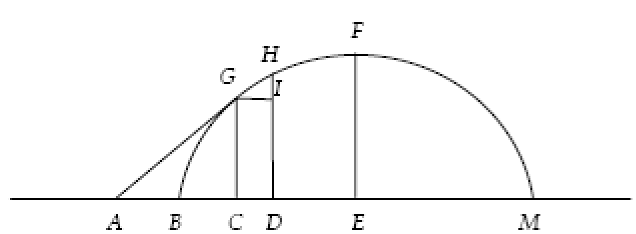
En esta explicación aparece de forma notable la concepción de Agnesi respecto a la naturaleza de las curvas. Al considerar que es posible tomar indistintamente DG y DF, Agnesi asume que la curva tiene, a través de un acercamiento infinitesimal, forma poligonal de lados infinitamente pequeños. Esta explicación la usa L´Hospital, aunque en él, fue más explicito en sus argumentaciones.

A partir de esta argumentación, expresa que el triángulo GDE, permite determinar la tangente a través de otra relación, análoga a la que en principio enunció; por similitud de triángulos GED, DBT, se determina la siguiente relación GE:GD::DB:DT, esto es $dy : \sqrt{dx^2 + dy^2} :: y : DT$, *despejando se tiene* $DT = \dfrac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$, *que es la fórmula general de la tangente.*

(Castañeda, 2004, p. 161)

Vemos que a través del uso de los diferenciales y la semejanza de triángulos se puede obtener una expresión con la que se puede calcular la magnitud de la tangente (segmento DT), notamos también que al hacer la consideración de los triángulos semejantes se concibe que la curva esta compuesta por una serie de segmentos infinitesimales, Agnesi utiliza argumentos de tipo analíticos auxiliado de argumentos geométricos – visuales para dar una mejor explicación de sus ideas a los lectores del libro.

Otra idea que también es vista en el libro de Agnesi en donde se utiliza a la tangente es al determinar los máximos y mínimos, veamos ahora parte del análisis que se hace en Castañeda (2004), revisando lo relacionado a la tangente para la determinación de los máximos y mínimos:



> *En una curva cualquiera GHF, sea EF la máxima de las ordenadas, tomamos una abscisa cualquiera BC y se determina su respectiva ordenada CG, el punto G va a determinar la tangente GA. Determinemos también DH infinitamente cercana a CG, llamamos BC = x, CG = y, así mismo determinamos GI paralela a BC, de tal forma que dx = GI = CD, dy = IH. En relación a esta argumentación, Agnesi enuncia una segunda caracterización al punto máximo o mínimo basándose en la propiedad que guarda la subtangente respecto a la curva; es claro que al aproximarse CG a EF, la subtangente AC será siempre la mayor y cuando CG cae en EF, la tangente será paralela a BC y por consecuencia la subtangente será infinita.*
>
> *(Castañeda, 2004, pp. 163-164)*

En el párrafo anterior vemos el uso que se le da a la tangente, esta sirve para caracterizar a la curva ya que ella y la tangente son una misma en un instante dado, de tal forma que al conocer las características de la tangente en un punto, estamos también determinando características de la curva, por ejemplo en el punto máximo la curva tiene un segmento infinitesimal paralelo al eje x, esta situación es obvia ya que al no estar este segmento en esta posición sino que por el contrario haciendo un ángulo con respecto a el eje x , entonces no estaríamos hablando de un máximo puesto que la curva seguiría creciendo, por otro lado también podemos apreciar visualmente el carácter variacional de la tangente ya que antes de la curva en la figura se encuentra en una determinada posición y posteriormente la recta tangente se encuentra en otra posición distinta.

Comentarios finales del apartado de libros de difusión del saber

Es importante distinguir que el propósito que persiguen este tipo de obras es distinto a las obras difundidas por matemáticos eruditos ya que mientras estos tienen como interés mostrar a una comunidad científica sus descubrimientos matemáticos con lo cual se hace avanzar la ciencia, los otros tenían como objetivo difundir el conocimiento entre un público mas generalizado, es por eso que vemos que una de las características de estas obras es que un mismo concepto se presenta desde varios enfoques, como puede ser mediante gráficas con argumentos geométricos, también se puede hablar acerca de los infinitesimales y manipularlos de acuerdo a sus propias reglas, así como también se pueden indagar y representar las características de una curva mediante un análisis de las mismas.

En ambas obras se utilizan diferentes argumentos para mostrar un tema, argumentos de tipo analítico, gráfico. La tangente en algunas ocasiones se presenta como un problema en sí mismo y en otras ocasiones como una herramienta para resolver otros problemas (máximos y mínimos), al ser la tangente y la curva una misma cosa en un segmento infinitesimal, podemos conocer características de la curva en ese segmento al conocer las características de la tangente, podemos saber, por ejemplo sí en la región de análisis la curva crece o decrece y que tan rápido lo hace, lo cual tiene que ver con la relación existente entre el cociente de los diferenciales, la idea de tangente variacional se encuentra presente de manera implícita, ya que al estar la tangente determinada por el cociente de segmentos infinitesimales y al observar que este cociente es cambiante ya que en cada punto de la curva va a tomar valores diferentes, también se consideran diferenciales negativos, lo cual tiene que ver con el decrecimiento de la función y con la inclinación de la pendiente, los argumentos gráficos se consideran de importancia para presentar las ideas del Cálculo Diferencial antes de incluso llegar a formalizaciones rigurosas. Todas estas ideas nos hacen reflexionar acerca de cómo presentamos actualmente estas ideas a nuestros alumnos, la historia nos muestra que la humanidad uso primero argumentos de tipo geométricos para llegar a la formulación del Cálculo Diferencial, para posteriormente llegar a un grado de formalización más profundo, los argumento de tipo visual son cosas que podemos ver y que posteriormente nos ayudan a imaginar por ejemplo la curva como compuesta de un conjunto de segmentos infinitesimales, sin embargo al presentar a los alumnos las ideas del Cálculo Diferencial se presentan algoritmos para derivar por ejemplo sin ni siquiera reflexionar acerca del significado de la derivada, nosotros consideramos que todos los argumentos vistos hasta el momento sirven como material valioso para la creación de una ingeniería didáctica que propicie la construcción conceptual por parte de los estudiantes de la tangente variacional.

Etapa posterior a la definición formal del Cálculo

Léonard Euler (1707 – 1783)

Uno de los matemáticos más grandes del siglo XVIII, elaboró toda una teoría de funciones en su libro l'analyse infinitésimale publicado en dos volúmenes alrededor de 1748, Cantoral y Farfán (2004), es en el primer volumen en donde desarrolla la teoría de las funciones, en el volumen 2 del libro citado se hace mención acerca de las curvas y sus propiedades, así como líneas de segundo, tercer y cuarto orden que realmente se refiere a curvas, se puede observar en su obra que trata de alejarse de los argumentos geométricos para darle prioridad a argumentos analíticos tal y como se puede observar en el primer volumen de la obra mencionada, a pesar de esto, vemos que en su segundo volumen que no abandona por completo los argumentos geométricos ni los apoyos visuales mediante figuras geométricas, de manera particular en el estudio que vamos a hacer del tratamiento que le da a la tangente nos percataremos como las explicaciones son con base a argumentos de tipo infinitesimal, en donde se utiliza el desarrollo de ecuaciones algebraicas, pero en su lenguaje y argumentaciones no hay un total abandono de los aspectos geométricos, los cual es de esperarse pues es una época en donde Newton y Leibniz tenían poco de haber muerto y como sabemos ellos formulan el Cálculo con base a argumentos geométricos ya que la geometría había sido muy importante hasta el siglo XVII, pero ahora con el desarrollo del nuevo Cálculo y ya que este todavía no tenia bases muy firmes, hacían falta argumentaciones de mayor rigor para fortalecer este Cálculo, naciente con Newton y Leibniz, los argumentos geométricos, se pensaba, no ayudaban para tal objetivo, podemos ver entonces en Euler un abandono por las ideas precedentes, a las argumentaciones geométricas aunque no en una forma total.

Revisemos ahora el capítulo XIII del segundo volumen de su obra INTRODUCTION A L' ANALYSE INFINITESIMALE, TOME SECOND:

CHAPITRE XVIII.

Des Affections des Lignes Courbes.

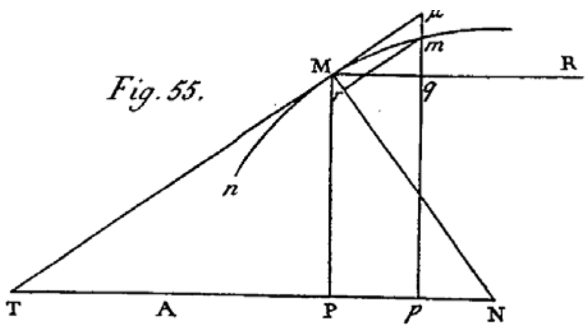
285. Nous avons détermine ci – diffus la nature des branches infinies en affinât une ligne droite, ou une courbe plus simple, qui ce confondit avec la courbe proposée à une distance infinie ; nous nous proposons de même, dans ce chapitre, d'examiner une portion quelconque de courbe considérée dans un espace fini, & de chercher la ligne droite, ou la courbe la plus simple, avec laquelle elle suiffe se confondre, au moins dans un espace très – petit. D'abord il est clair que toute ligne droite qui touche le courbe en un point, se confond avec elle en cet endroit, ou qu'elle a avec elle au moins deux points communs. Mais on peut affie aligner d'autres courbes qui se confondent plus exactement avec la portion donnée de la courbe proposée, & la baisent en quelque forte. On connaîtra très – bien par-là l'état de la ligne courbe pour chaque point avec ses différentes affections.

(Euler, 1748, p. 152)
(Traducción del Latín al Francés por J. B. Labey en 1797)

Euler nos explica como entiende a la tangente a una curva, el nos comenta que esta se va a confundir con la curva propuesta en un espacio muy pequeño, dice que se va a examinar una porción cualquiera de una curva y se buscara a la recta con la cual ella se va a confundir al menos en un espacio muy pequeño, también nos habla de como una recta se puede confundir con una curva en un punto o que tiene con ella por lo menos dos puntos comunes, decimos con base a esto que se esta manejando la idea de segmentos infinitesimales ya que esta haciendo la descripción en cuanto a la curva en una porción muy pequeña de la misma tal y como se observa en el texto. En otra sección de observa :

Fig. 55 *286. Soit donc proposée une équation quelconque entre les coordonnées x & y pour une courbe quelconque. Donnons à l'abscisse x une valeur détermine AP=p, & cherchons celle de l'appliquée qui répond à cette abscisse ; s'il y en a plusieurs, nous en prendrons une à volonté PM=q ; le point M appartiendra à la courbe, ou fera un point par où elle passera. Mais alors, fi dans l'équation proposée entre x & y on écrit p au lieu de x & q au lieu de y, tous les termes de l'équation se détruiront mutuellement, de sorte que le reste sera nul. A présent, pour connaître la nature de cette portion de la* *courbe qui paffe par le point M, menons de ce point M la droite M q parallèle à l'axe AP que nous prendrons maintenant pour axe ; & faisons cette nouvelle abscisse M q = t & l'appliquée q m = u. Comme le point m appartient aussi à la courbe, si on prolonge m q jusqu'a p, & qu'on mette au lieu de x, A p = p + t, & au lieu de y, p m = q + u ; il en doit résulter pareillement une équation identique.*

(Euler, 1748, pp. 152-,153)



Para analizar la naturaleza de la curva Euler propone que se prolongue la *x*, a la cual se le a dado el valor de $AP = p$ así como la *y*, a la cual se la a dado el valor de $PM = q$, para poder observar el comportamiento de la curva, sin embargo este análisis se hace con base a asignarle una ecuación a la curva en donde estos incrementos se representan por *t* y *u*, se va a comenzar a hacer un análisis de la ecuación tomando en cuenta estas prolongaciones como las llama Euler, por lo tanto para poder analizar el comportamiento de la curva deja que las variables *x*, la cual se sustituyo por *p* y la variable *y* la cual se sustituyo por *q* se incrementen en $p + t$ y $q + u$ respectivamente, se ve como la curva pasa de un punto *M* a un punto *m*, al seguir observando el comportamiento de la curva y además para su explicación se auxilia de una gráfica al efectuar estos incrementos se va a obtener una nueva ecuación, la cual según Euler resultará idéntica, vamos a ver como es que empieza a analizar la ecuación:

287. Après avoir fait cette substitution dans l'équation proposée entre x & y, tous les termes, dans lesquels ni t ni u nefe trouvent pas, se détruiront mutuellement ; & il ne refera que ceux qui renferment les nouvelles coordonnées t & u. On aura donc une équation de cette forme :

$$0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + Htu^2 + \&c.$$

Dans laquelle A, B, C, D, &c., font des quantités constantes, compotées des constantes de la première équation & des quantités p & q que nous regardons aussi comme constantes. La nature de la courbe et donc exprimée par cette nouvelle équation ; mais elle et rapportée à l'axe Mq, fur lequel le point même de la courbe et pris pour l'origine des abscisses.

288. D'abord il est clair que, si on fait M q = t = 0, on aura aussi q m = u = 0, parce que le point m tombe fur M. Ensuite, comme notre but est de connaître seulement la très-petite portion de la courbe qui est près de M, nous le remplirons en prenant pour t des nombres très petits ; auquel cas q m = u aura aussi une valeur très-petite ; car il ne s'agit que d'un arc Mm presque évanouissant. Mais, si nous prenons pour t & u des valeurs très-petites, les termes tt, tu, & uu, feront encore beaucoup plus petits, & les suivants $t^3, t^2u, tuu, u^3, \&c.$ *encore plus petits que ceux-ci, & ainsi de suite ; c'est pourquoi, comme on peut omettre des grandeurs très-petites à l'égard d'autres qui font en quelque sorte infiniment plus grandes, il restera l'équation 0 = A t + B u, qui appartient à la ligne droite Mu menée par le point M, & qui apprend que, si le point m s'approche très-près de M, cette droite se confond avec la courbe.*

(Euler, 1748, p. 153)

Al revisar lo anterior, vemos que Euler desprecia los términos de *p* y *q*, esto es equivalente a tener una ecuación en donde la variable *p* se incremento en *p + t* y la variable *q* se incremento en *q + u* y al restar a la nueva expresión obtenida la expresión original se obtiene un nuevo polinomio que esta en función de los términos que representan lo que a cambiado la curva, ya que se están tomando en cuenta solo los términos que representan el cambio, mediante el polinomio: $0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + Htu^2 + \&c.$

Posteriormente lo que hace es despreciar los términos que son demasiado pequeños, con lo cual solo se estarán tomando en cuenta en el polinomio anterior los términos cuyo exponente es 1 ya que términos con t^2, u^2 o exponentes superiores en el polinomio resultan ser demasiado pequeños para ser tomados en cuenta, de tal forma que el polinomio quedaría $0 = At + Bu$ el cual es un polinomio que representa una recta, y es precisamente con esta expresión matemática la cual al relacionarla con la figura se detecta que se refiere a la hipotenusa de un pequeño triángulo *Mqμ*, Euler nos muestra que la curva se comporta como una recta en una porción muy pequeña de la misma, sí es que se toman valores de *t* demasiados pequeños, o dicho de otra forma infinitamente pequeños. Al revisar el lenguaje que maneja Euler para dar sus explicaciones, vemos que se manejan palabras o ideas muy semejantes a las que utilizaba Newton, por ejemplo cuando se dice que el objetivo es conocer una muy pequeña porción de la curva, o cuando menciona que se trata de un arco *Mn* que casi se desvanece, además podemos notar que la razón entre los segmentos infinitesimales es lineal y esto lo podemos verificar también matemáticamente con la expresión: $0 = At + Bu$, la cual es la ecuación de una línea recta, la línea recta que pasa por *Mμ*.

Continuando con el análisis ahora revisemos lo siguiente:

> *289. Cette droite Mu sera donc une tangente de la courbe au point M ; d'où l'on peut conclure un moyen de mener une tangente μMT à un point quelconque M de la courbe. Il n'y a qu'a tirer de l'équation* $At + Bu = 0, \frac{u}{t} = -\frac{A}{B} = \frac{q\mu}{Mq}$ *; ce qui donnera* $q\mu : Mq :: MP : PT :: -A : B$ *; & par conséquent, à cause que* $PM = q, PT = \frac{-Bq}{A}$ *. Cette portion PT de l'axe se nomme ordinairement SOUSTANGENTE ; on en conclura donc cette*

Règle

Pour trouver la sous-tangente.

Après avoir trouvé dans l'équation à la courbe, que l'appliquée y=q satisfait à l'abscisse x=p, on supposera x=p+t, & y=q+u ; & des termes qui résulteront de la substitution, on conservera seulement ceux dans lesquels t & u ont une feule dimension, en négligeant tous les autres ; on arrivera par ce moyen à cette équation de ceux termes A t + Bu = 0 ; ce qui, A, & B étant supposés connus, donnera la sous-tangente $PT = \frac{-Bq}{A}$

(Euler, 1748, pp. 153- 154)

De la ecuación obtenida $0 = At + Bu$, Euler encuentra la relación $\frac{u}{t}$, esta relación se podría escribir en términos actuales como $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ya que como vimos *u* es la pequeña porción en que se incrementa la *q* la cual sustituyo a la *y*, y *t* es la pequeña porción en que se incremento la *p*, la cual sustituyo a la *x*, es aquí en donde Euler utiliza la semejanza de triángulos para encontrar la relación existente en la tangente que es la misma relación que existe entre el triángulo *MPT* y el triángulo infinitesimal *μqM*, de aquí también se desprende la regla para encontrar la subtangente, sí comparamos los primeros pasos de esta regla, con la regla actual para obtener la derivada por el método de los IV pasos, vemos que existe una gran similitud ya que se conservan primero solo los términos que muestran el cambio y de esos términos solo se conservan aquellos que tienen exponente 1, para posteriormente encontrar la relación $\frac{u}{t}$ que es la que determina la recta tangente a la curva, aunque ya al finalizar lo que se determina es la subtangente, la cual esta dada por la relación $PT = \frac{-Bq}{A}$, con la cual conociendo los valores dados por A, B y q, se podrá encontrar el valor de PT. Veamos como se utiliza la regla revisando el siguiente ejemplo:

Exemple II

Soit la courbe une Ellipse décrite du centre A, dont l'équation est $yy = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$ *ou* $aayy + bbxx = aabb$.

Ayant pris $AP = p$ *& supposé* $PM = q$ *, on aura* $aaqq + bbpp = aabb$*. Faisant ensuite* $x = p + t$ & $y = q + u$ *; comme il suffit de conserver feulement les termes ou t & u n'ont qu'une dimension, on peut négliger tout de suite les autres & on aura* $2aaqu + 2bbpt = 0$ *; d'où l'on tire* $\frac{u}{t} = \frac{-bbp}{aaq} = \frac{-A}{B}$*. La sous-tangente PT sera donc* $= \frac{-B}{A}q = -\frac{aaqq}{bbp} = \frac{-aa+pp}{p}$ *; & comme ce résultat est négatif, il apprend que le point T tombe du côté opposé. Au reste, cette expression s'accorde parfaitement avec celle que nous avons trouvée auparavant pour déterminer les tangentes de l'Ellipse.*

(Euler, 1748, p. 155)

En el ejemplo expuesto se observa la aplicación de la regla mencionada anteriormente para encontrar la subtangente, se puede ver como Euler le da una interpretación al signo negativo del resultado diciendo que la tangente esta del lado opuesto lo cual lo podemos interpretar como que el ángulo de inclinación que se hace entre la tangente y el eje x es obtuso, podemos decir que este método toma en cuenta aspectos infinitesimales al despreciar los incrementos que son infinitamente pequeños, también se encuentran presentes ideas de tipo variacional puesto que los términos que se toman en cuenta en el polinomio $0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + Htu^2 + \&c.$ son como podemos darnos cuenta sólo aquellos que representan el cambio, también se encuentra presentes ideas de tipo geométrico como son la semejanza de triángulos y se enuncia de manera explícita a la recta tangente a la curva, se utiliza un algoritmo con el cual solo se aplica la regla por lo cual ya no se hace necesario del apoyo visual mediante una gráfica para resolver el ejemplo, a diferencia de Newton en donde la mayoría de sus explicaciones están apoyadas con gráficas.

A continuación vemos como Euler concibe a la recta tangente de una curva como algo cambiante:

290. La tangente de la courbe étant donc connue de cette manière, on connaît en même temps la direction que suit la courbe au point M. Car on peut très-bien regarder une ligne courbe, comme la trace qu'un point en mouvement formerait en changeant continuellement de direction, & par conséquent le point qui par son mouvement décrit la courbe, fera dirigé en M suivant la tangente M μ ; &, s'il conservait cette direction, il décrirait la droite M μ : mais il s'en écarte à chaque instant, puisqu'il décrit une courbe. Ainsi, pour connaître le cours d'une ligne courbe, il suffirait de déterminer pour chaque point de la tangente ; ce qui peut se faire facilement, en suivant la méthode que nous venons de donner ; & ce qui ne présentera jamais aucune difficulté, pourvu que l'équation à la courbe soit rationnelle & délivrée de fractions ; or on peut toujours ramener à une telle forme toutes les équations ; mais, si l'équation est irrationnelle ou embarrassée de fractions, & qu'on veuille se dispenser de la ramener à une forme rationnelle & entière, on pourra encore employer la même méthode, mais avec quelque modification ; & c'est cette modification qui a donné naissance au Calcul différentiel ; c'est pourquoi nous réserverons pour ce calcul la méthode de trouver les tangentes, lorsque l'équation à la courbe ne sera pas rationnelle & entière.

(Euler, 1748, pp. 155- 156)

Con lo anteriormente expuesto por Euler nos damos cuenta que concibe a la recta tangente a una curva como algo cambiante ya que dice que la recta tangente a una curva se descarta a cada momento, puesto que describe a una curva, por lo tanto sigue diciendo que para conocer el curso de una línea curva bastaría con determinar para cada punto de la curva la tangente, también comenta que sí la ecuación que representa a la curva es irracional o fraccionaria se tendría que utilizar el mismo método empleado pero con alguna modificación y esta modificación es la que dio el nacimiento a el Cálculo Diferencial.

Es en este texto en donde de manera explícita Euler menciona que la tangente va a estar cambiando, que es variable y aunque esta idea ya se encontraba presente desde Newton y Leibniz ellos no habían enunciado esto de manera explícita, sin embargo observamos que Euler lo enuncia explícitamente.

Comentarios finales sobre el análisis de Euler

Para encontrar la tangente a una curva, Euler utiliza un método con similitud al método actual para derivar, el llamado método de los IV pasos, como ya se expuso anteriormente, después de haberse sustituido *x* por *p*, así como *y* por *q*, y posteriormente incrementarse los valores, por $p + t$, así como $q + u$, para observar el comportamiento de la curva, se utilizarán solo los términos que representa el cambio, es decir se obtendrá una ecuación en términos de *u* y *t*, posteriormente se desprecian los términos que son muy pequeños, como son aquellos que tienen por exponentes a el 2 o exponentes mayores, finalmente se tiene la relación de la recta tangente a la curva, cabe destacar que el método utilizado evidencia que lo que se esta calculando es la hipotenusa de un pequeño triángulo infinitesimal y podemos ver de manera clara esta relación ya que al final solo se utilizan los términos cuyo exponente es 1 del polinomio que representa los cambios, también es importante destacar que para determinar el comportamiento de la curva Euler deja que el punto que describe a la curva se siga moviendo, y este investigar como es la expresión matemática que describe como están relacionados esos cambios los cuales están representados por ***t*** y ***u*,** es propio de la época en la cual se quería representar mediante modelos matemáticos los fenómenos de cambio, aquellos que se comportaban tal y como lo enuncia Cantoral en el libro Desarrollo del pensamiento Matemático:

> *…Un programa alternativo en el campo de la ciencia, con el que se buscaba modelar, anticipar, predecir fenómenos naturales con el respaldo matemático. Un amplio programa de matematización de los fenómenos que se podían modelar con una muy fructífera metáfora del flujo del agua, una metáfora que se aplicaría por igual a la evolución de muy diversas magnitudes reales*
>
> *(Cantoral, 2000, p. 195)*

Como vemos lo que nos esta presentando Euler es precisamente un polinomio que sirve para expresar cambios, y es el análisis de tal polinomio el que le permite encontrar la expresión con la cual se podrá determinar la recta tangente, la expresión esta dada por el polinomio: $0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + Htu^2 + \&c.$, como se puede ver Euler encuentra una relación entre una expresión algebraica la cual representa a una recta y que es obtenida a partir del trabajo que se hace con el polinomio en donde están representados los cambios ya que esta en términos de *t* y *u* así como despreciar los términos que son muy pequeños, con la hipotenusa de un pequeño triángulo la cual al extenderse en ambos sentidos se convertiría en la tangente de la curva en el punto *M*, esta que acabamos de mencionar es muy parecida a la definición que da L´Hospital sobre curva y que dice que es una poligonal que esta formada por infinitos segmentos infinitesimales, en donde al extender uno de ellos en ambos sentidos se tiene la recta tangente a la curva en un punto, es importante también resaltar el hecho de que Euler es el primero en mencionar explícitamente el carácter variacional de la recta tangente a una curva, esto es relevante puesto que uno de los intereses de nuestro trabajo de investigación es mencionar el momento en que nace la tangente variacional de una curva, sabemos que de las ideas de Newton y Leibniz ya se podía inferir el carácter variacional de la tangente, pero en su discurso no se explicitaba esta cuestión a diferencia de Euler, el cual menciona de manera explicita que la tangente es variable.

Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813)

Considerado junto con Euler uno de los dos más grandes matemáticos del siglo XVIII, sus contribuciones al Cálculo son con base a el tratamiento que le da a las funciones ya que consideraba que toda función podía ser expresada como una serie de Taylor, además considera a la derivada como una función, en cuanto a la tangente variacional vamos a observar que la idea se encuentra presente de manera implícita, sin embargo en las argumentaciones algebraicas que hace se manifiesta la idea de tangente, aunque no es mencionada como tal, el punto de partida de Lagrange es que cualquier función de una variable $f(x)$, admite un desarrollo de la serie de Taylor:

> *Nous étant ainsi assurés de la forme générale du développement de la fonction f(x+i), voyons plus particulièrement en quoi ce développement consiste, et ce que signifie chacun de ses termes.*

On voit d'abord que si on cherche dans cette fonction ce qui est indépendant de la quantité i, il n'y a qu'à faire i=o, ce qui la réduit à fx. Ainsi fx est la partie de f(x+i), qui reste lorsque la quantité i devient nulle ; de sorte que f(x+i) sera égale à fx, plus à une quantité qui doit disparaître en faisant i=o, et qui sera par conséquent, ou pourra être censée multipliée par une puissance positive de i : et comme nous venons de démontrer que dans le développement de f(x+i) il ne peut entrer aucune puissance fractionnaire de i, il s'ensuit que la quantité dont il s'agit ne pourra être multipliée que par une puissance positive et entière de i ; elle sera donc de la forme iP, P étant une fonction de x et i, qui ne deviendra point lorsque i=o.

On aura donc ainsi f(x+i)=fx+iP, donc f(x+i)-fx=iP, et par conséquent divisible par i ; la division faite, on aura $P = \dfrac{f(x+i) - f(x)}{i}$

(Lagrange, 1797, p. 8)

Lagrange hace una descripción de como va a obtener la expresión analítica que representara a la función, en el párrafo anterior se menciona que se va a buscar en la expresión de $f(x+i)$, aquello que es independiente de *i*, es decir aquello que permanece cuando $i = 0$, si comparamos lo que acabamos de enunciar con la forma en que se obtiene la derivada, ya que hablando en términos actuales, se obtiene el límite de los incrementos, cuando la variable independiente tiende a cero, vemos que después de hacer el cociente de los incrementos, se desprecian los términos en donde se encuentran presentes los incrementos de la variable independiente, solo queda aquella expresión que es independiente de estos incrementos, lo cual sería la derivada de la función; notamos entonces que hay una gran similitud entre lo enunciado por Lagrange y el proceso actual en como se obtiene la derivada por el método de los cuatro pasos, al comparar con el método utilizado por Euler, vemos que ambos utilizan el despreciar términos, aunque en el caso de Euler el desprecia los términos por ser muy pequeños; por otro lado al verificar la expresión $P = \dfrac{f(x+i) - f(x)}{i}$, vemos que en ella se encuentra la definición de tangente, pero es una tangente variable ya que la *x* puede tomar diversos valores, podríamos encontrar la tangente en un punto $(x_0, f(x_0))$ al encontrar el resultado de $f(x+i) - f(x)$, posteriormente dividir la expresión resultante entre *i*, y finalmente despreciar los términos en donde se encuentra presente la *i*, esto es muy parecido a obtener la derivada por el método de los cuatro pasos, solo que en el método de los cuatro pasos se encuentra presente también la idea de límite, a diferencia de lo enunciado por Lagrange, también observamos que a pesar de que no es mencionado explícitamente se encuentra también presente la idea de triángulo infinitesimal, aunque esta forma de enunciarlo no es mencionado por Lagrange, ya que el pretendía no utilizar el discurso de los infinitesimales, como es comentado en las notas al margen hechas por Carlos Alvarez Jiménez en el libro "Curso de Análisis de Cauchy", el cual tradujo del Francés al Español, la mención dice "*Cauchy introduce a la función derivada a partir del concepto de límite de una función y gracias al concepto de una cantidad infinitamente pequeña. Lagrange, en cambio, define el concepto de función derivada sin recurrir a estos conceptos, considerados por él como* ***metafísicos,*** *y lo introduce de una manera "puramente algebraica"*. Observamos entonces una forma novedosa de definir a la derivada a partir del desarrollo de la serie de Taylor. Continuando con el análisis veamos el siguiente párrafo:

> *Or, P étant une nouvelle fonction de x et i, on pourra de même en séparer ce qui est indépendant de i, et qui par conséquent ne s'évanouit pas lorsque i devient nul. Soit donc p ce que devient P lorsqu'on fait i=o, p sera une fonction de x sans i ; et par un raisonnement semblable au précédent, on prouvera que P=p+iQ étant la partie de P, qui devient nulle lorsque i=o, et Q étant une nouvelle fonction de x et i qui ne devient pas infinie lorsque i=o.*
>
> *On Aura, par ce procédé,* $f(x+i) = fx + iP, P = p + iQ, Q = q + iR, R = r + iS, \&c.$ *; donc, substituant successivement.*
> $f(x+i) = fx + iP = fx + ip + i^2Q = fx + ip + i^2q + i^3R = \&c.$ *; ce qui donnera pour le développement de* $f(x+i)$*, une série de la forme que nous avons supposée au commencement.*

(Lagrange, 1797, p. 9)

El proceso enunciado al principio es reiterativo de tal forma que sí ya se había obtenido una primera derivada durante el proceso, pero al volver nuevamente a repetir el proceso se estará obteniendo la que sigue y así sucesivamente podemos suponer que se estarán encontrando funciones equivalentes a la segunda derivada, tercera derivada, de tal forma que observamos que P, Q, R, etc. Son obtenidos de forma similar y en donde en cada uno de ellos se calcula con la misma expresión matemática que representa a la recta tangente variable ya que vamos a tener expresiones como:

$Q = \frac{P-p}{i}$, $R = \frac{Q-q}{i}$, $S = \frac{R-r}{i}$, de esta forma prueba Lagrange que puede desarrollar la función en una serie de Taylor tal y como lo había supuesto al inicio. Posteriormente se menciona lo siguiente:

> *Mais le principal avantage de la méthode que nous avons exposée, consiste en ce qu'elle fait voir comment les fonctions p, q, r, &c. résultent de la fonction principale fx, et sur -tout en ce en ce qu'elle prouve que les restes iP, iQ, iR, &c. sont des quantités qui doivent devenir nulles lorsque i=o ; d'où l'on tire cette conséquence importante, que dans la série* $fx + pi + qi^2 + ri^3 + \&c.$ *qui naît du développement de f(x+i), on peut toujours prendre f assez pour qu'un terme quelconque soit plus grand que la somme de tous les termes qui le suivent ; et que cela doit avoir lieu aussi pour toutes les valeurs plus petites de l.*
>
> *Car, puisque les restes iP, iQ, iR, &c. sont des fonctions de qui deviennent nulles, par la nature même du développement, lorsque i=o, il s'ensuit qu'en considérant la courbe dont i serait l'abscisse, et l'une de ces fonctions l'ordonnée, cette courbe coupera l'axe à l'origine des abscisses ; et à moins que ce point ne soit un point singulier, ce qui ne peut avoir lieu que pour des valeurs particulières de x, comme il est facile de s'en convaincre avec un peu de réflexion, et par un raisonnement analogue à celui du n.10 ci-dessus, le cours de la courbe sera nécessairement continu depuis ce point ; donc elle s'approchera peu à peu de l'axe avant de le couper, et s'en approchera par conséquent d'une quantité moindre qu'aucune quantité donnée ; de sorte qu'on pourra toujours trouver une abscisse i correspondant à une ordonnée moindre qu'une quantité donnée ;*

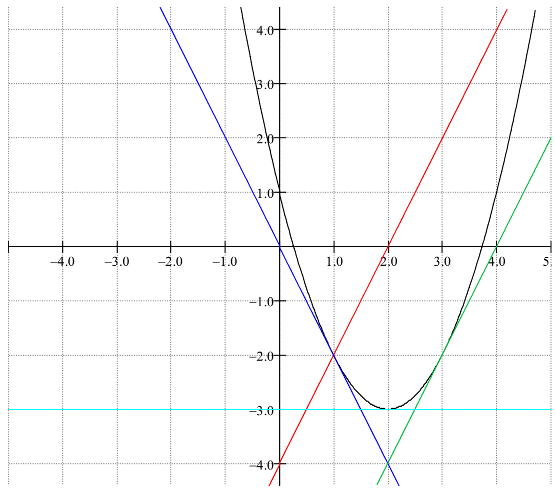
et alors toute valeur plus petite de i répondra aussi à des ordonnées moindres que la quantité donné.

Ou pourra donc prendre i assez petit, sans être nul, pour que iP soit moindre que fx, ou pour que iQ soit moindre que p, ou pour que iR soit moindre que q, et ainsi des autres ; et par conséquent pour que i^2R *soit moindre que iP, ou que* i^3R *soit moindre que* i^2q*,&c. ; donc, puisque (n. °11)* $iP = ip + i^2q + i^3r + \&c.$, $i^2Q = i^2q + i^3r + \&c.$, $i^3R = i^3r + \&c.$, *il s'ensuit qu'on pourra toujours donner à i une valeur assez petite pour que chaque terme de la série* $fx + ip + i^2q + i^3r + \&c.$, *devienne plus grand que la somme de tous les termes suivants ; et alors toute valeur de i plus petite que celle-là satisfera toujours à la même condition.*

On doit regarder ce théorème comme un des principes fondamentaux de la théorie que nous proposons de développer ; on le suppose tacitement dans le calcul différentiel et dans celui des fluxions, et c'est par cet endroit qu'on peut dire que ces calculs donner le plus de prise, sur – tout dans leur application aux problèmes géométriques et mécaniques.

(Lagrange, 1797, p. 12)

En el texto anterior se observa que a pesar de que Lagrange quiere evitar hablar de los infinitesimales, utiliza ideas similares en la exposición de su método ya que menciona que los restos *iP, iQ, iR,* etc, son cantidades que deben convertirse nulas cuando $i = 0$, como se menciono anteriormente y por la forma en como se obtienen cada uno de los términos se observa que cada término es la derivada del término anterior multiplicado por un factor, es decir implícitamente se encuentran presentes la idea de los infinitesimales y la de límite, podemos también decir que las derivadas son consideradas como funciones, es decir no se trata de un valor particular calculado en un punto, sino se trata de una expresión analítica, cuando se menciona la idea de derivada como una función, estamos hablando de la tangente variable, veamos la siguiente gráfica en donde, para explicar lo anterior revisamos la siguiente función $f(x) = x^2 - 4x + 1$ y su derivada $f'(x) = 2x - 4$



En la gráfica la función $f(x) = x^2 - 4x + 1$ esta representada en color negro y la derivada $f'(x) = 2x - 4$ en color rojo, encontramos la tangente a la curva en tres puntos *A* (1,-2), *B* (2,-3), C (3,-2) podemos observar lo siguiente:

Punto (x_0, y_0)	Signo asociado a la posición de la tangente en el punto (x_0, y_0)	Signo de la derivada en el punto (x_0, y_0)	Valor de la inclinación de la recta tangente en el punto (x_0, y_0)	Función Derivada evaluada en el punto (x_0, y_0)
A(1,-2)	(-)	(-)	**-2**	-2
B(2,-3)			0	0
C(3,-2)	(+)	(+)	**2**	2

En la tabla anterior solo se revisaron tres puntos de la función, aunque como sabemos hay infinidad de puntos, también hay una infinidad de rectas tangentes que se podrían trazar en donde cada uno de esos valores de las rectas tangentes corresponderían a los valores de la función derivada. Lo que acabamos de evidenciar no se muestra de manera explícita en el discurso de Lagrange, a diferencia de Euler que se menciona que la tangente va a ir cambiando de punto a punto de la curva, sin embargo vemos que ahora con Lagrange aunque la idea se encuentra presente, el no lo menciona en su discurso, al tratar a la derivada como función, parece como que se perdiera el concepto de tangente variable, aunque como sabemos la idea se encuentra presente.

Revisemos otros párrafos del texto:

> *Au reste, il est facile de voir que la manière que nous venons de donner pour trouver successivement les termes de la série qui représente une fonction de x+i, développée suivant les puissances de i, peut s'appliquer en général au développement de toute fonction de x et de i, pourvu que cette fonction soit susceptible d'être réduite en une série qui procède suivant les puissances positives et entières de i. Car le raisonnement du n. ° 9, par lequel nous avons prouvé que toute fonction de x+i est, généralement parlant, susceptible de cette forme, ne pourrait pas s'appliquer en général à une fonction quelconque de x et i. Mais dans les cas où cette réduction est possible, on pourra toujours appliquer à la série résultant du développement suivant les puissances ascendantes de i, la conséquence que nous en avons tirée dans le n.°14 ; savoir, que la quantité i pourra être prise assez petite pour qu'un terme quelconque de la série soit plus grand que tous ceux qui le suivent, pris ensemble.*
>
> *Après ces ; considérations générales sur le développement des fonctions, nous allons considérer en particulier la formule du n.° 3 ;*
>
> $$f(x+i) = fx + pi + qi^2 + ri^3 + \&c.,$$
>
> *et chercher comment les fonctions dérivées p, q, r, &c. dépendent de la fonction primitive fx.*
> *Pour cela, supposons que l'indéterminée x devienne x+o, o étant une quantité quelconque indéterminée et indépendante de i, il est visible que f(x+i) deviendra f(x+i+o) ; et l'on voit en même temps que l'on aurait le même résultat en mettant simplement i+o à la place de i dans f(x+i). Donc aussi le résultant doit être le même,*

soit qu'on mette dans la série $fx + pi + qi^2 + ri^3 + \&c.$, *i+o à la place de i, soit qu'on y mette x+o au lieu de x.*

La première substitution donnera

$$fx + p(i+o) + q(i+o)^2 + r(i+o)^3 + \&c.;$$

savoir, en développant les puissances de i+o, et n'écrivant, pour plus de simplicité, que les deux premiers termes de chaque puissance, parce que la comparaison de ces termes suffira pour les déterminations dont nous avons besoin,

$$fx + pi + qi^2 + ri^3 + si^4 + \&c.;$$

$$+\ po + 2qio + 3ri^2o + 4si^3o + \&c,$$

Pour faite l'autre substitution, soit

$fx + f'xo + \&c., p + p'o + \&c., q + q'o + \&c, r + r'o + \&c.,$ *ce que deviennent les fonctions fx, p, q, r, &c. en y mettant x+o pour x, et ne considérant dans le développement que les termes qui contiennent la première puissance de o, il est clair que la même formule deviendra*

$$fx + pi + qi^2 + ri^3 + si^4 + \&c.$$

$$f'xo + p'io + q'i^2 + r'i^3o + \&c.$$

Comme ces deux résultats doivent être identiques, quelles que soient les valeurs de i et de o, on aura, en comparant les termes affectés de o, de io, i^2o, *&c.* $p = f'x$, $2q = p'$, $3r = q'$, $4s = r'$, *&c.*

Maintenant, de même que $f'x$ *est la première fonction dérivée de fx, il est clair que* p' *est la première fonction dérivée de p, que* q' *est la première fonction dérivée de q,* r' *est la première fonction dérivée de r, et ainsi de suite. Donc si, pour plus de simplicité et d'uniformité, on dénote par fx la première fonction dérivée de fx, par* $f''x$ *la première fonction dérivée de* $f'''x$ *la première fonction dérivée de* $f''x$, *et ainsi de suite, on aura*

$p = f'x$, *et de la* $p' = f''x$ *; donc* $q = \dfrac{p'}{2} = \dfrac{f''x}{2}$ *; donc* $q' = \dfrac{f'''x}{2}$ *; es de la*

$r = \dfrac{q'}{3} = \dfrac{f'''x}{2\bullet 3}$ *; donc* $r' = \dfrac{f^{IV}x}{2\bullet 3}$, *et de la* $s = \dfrac{r'}{4} = \dfrac{f^{IV}x}{2\bullet 3\bullet 4}$, *et ainsi de suite.*

Donc, substituant ces valeurs dans le développement de la fonction f(x+i), on aura

$$f(x+i) = fx + f'xi + \frac{f''x}{2}i^2 + \frac{f'''x}{2\bullet 3}i^3 + \frac{f^{IV}x}{2\bullet 3\bullet 4}i^4 + \&c.$$

Cette nouvelle expression a l'avantage de faire voir comment les termes de la série dépendent les uns des autres, et sur - tout comment, lorsqu'on sait former la première fonction dérivée d'une fonction primitive quelconque on peut former toutes les fonctions dérivées que la série renferme.

(Lagrange, 1797, p. 14)

Finalmente observamos como al aplicar reiteradamente el mismo proceso se obtiene una expresión desarrollada en serie de Taylor en donde se encuentra presente las funciones derivadas, es evidente que aquí también se encuentra presente la predicción ya que la serie nos muestra como al conocer el valor de la función en un punto y sus derivadas consecutivas, se puede predecir un estado futuro, las derivadas sucesivas que se están obteniendo se encuentran con el mismo algoritmo, en donde tal y como mencionamos anteriormente se encuentra presente la noción de tangente variable y cada nueva derivada depende de la anterior, y a su vez esta de la anterior de tal forma que cada derivada de los términos de la serie depende de la función $f(x)$.

Comentarios finales sobre el análisis de Lagrange

El tratamiento que le da Lagrange a las funciones es novedoso puesto que trata a la idea de derivada (aunque no definida en un sentido estricto) como una función, al hacer esto desde nuestro punto de vista se pierde del discurso la noción de tangente variable ya que se habla de la función pero no se hace evidente como es que cada uno de los valores de las tangentes que se obtienen en cada uno de los puntos de la curva son los que conforman la función derivada, otra situación que notamos es que aunque en las explicaciones que da Lagrange no utiliza argumentos de tipo geométricos, estos se encuentran presentes en las expresiones matemáticas por ejemplo en la expresión: $P = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ se encuentra la idea de tangente, a pesar de que no sea enunciado como tal, también se encuentra presente la idea de triángulo infinitesimal ya que una forma diferente de decir que se desprecian los términos que son infinitamente pequeños es decir que se va a buscar en la expresión de

$f(x+i)$, aquello que es independiente de *i*, aunque ambas ideas llegan a lo mismo Lagrange no esta hablando de infinitesimales, mas bien sus desarrollos algebraicos le van sirviendo para ir construyendo sus conceptos, los cuales están basados en que las funciones pueden ser descompuesta en términos dados por la serie de Taylor, con Lagrange podemos ver de manera más rotunda el abandono que los matemáticos de la época estaban haciendo por las explicaciones basadas en argumentos geométricos y el apoyo de gráficas ya que el no se auxilia de gráficas ni figuras geométricas para mostrar sus conceptos, la tangente variable no se muestra, no se la relaciona con los signos que pueda tener la función derivada en cada momento o los valores o que representa el valor de la función derivada evaluada en un punto, sin embargo la noción de variación consideramos se encuentra presente a pesar de que no se habla acerca de la tangente variable, ya que al estar tratando con funciones resulta evidente que se esta hablando de situaciones cambiantes. Podemos decir entonces que a través del modelo que nos presenta Lagrange en donde no encuentran presentes los infinitesimales podemos obtener la función derivada, es decir por medio de un modelo discreto que es: $f(x+i) = fx + f'xi + \frac{f''x}{2}i^2 + \frac{f'''x}{2\bullet 3}i^3 + \frac{f^{IV}x}{2\bullet 3\bullet 4}i^4 + \&c.$ se puede ir obteniendo cada uno de los puntos de la función derivada, ya que la derivada evaluada en cada uno de los puntos de la función nos da los valores de una nueva función que es la función derivada.

Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

Cauchy tuvo gran trascendencia, ya que marco el discurso educativo de su época, incluso su influencia se encuentra presente hasta nuestros días, (Cantoral, 2001; Ferrari, 2001). "*Se reconoce en su obra la influencia de las ideas de Euler, pero a su vez un distanciamiento de ellas hacia un enfoque más analítico que algebraico*" Ferrari (2001). A continuación vamos a transcribir algunos fragmentos de su obra "Curso de análisis" en donde vemos la definición de derivada, y se observa que se encuentra presente de manera implícita la idea de tangente:

> *Cuando la función $y = f(x)$ permanece continua, entre dos límites dados de la variable **x** y si se asigna a esta variable un valor comprendido entre esos dos límites, un*

incremento infinitamente pequeño atribuido a la variable produce un incremento infinitamente pequeño de la función. En consecuencia, si se hace $\Delta x = i$, *los dos términos de la razón de las diferencias*

(1)
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

serán cantidades infinitamente pequeñas. Pero mientras que estos dos términos se aproximan indefinidamente y de manera simultanea al límite cero, la razón misma podrá converger a un límite, ya sea positivo o negativo. Este límite, cuando existe, tiene un valor determinado para cada valor particular de x.

Agustin-Louis Cauchy, 1823, Traducción de Carlos Alvarez Jiménez, p. 235

Notamos que ya se encuentra presente en la explicación la noción de límite, también vemos que se menciona la palabra incremento, a diferencia de Newton y Leibniz que hablaban de puntos infinitamente cercanos, o las diferencias entre dos puntos infinitamente cercanos, Cauchy menciona en este párrafo que la variable x al tener un incremento infinitamente pequeño, provoca un incremento infinitamente pequeño en la función, de tal forma que observamos que se encuentran aquí presentes de manera más explícita ideas de tipo variacional, por otro lado también se encuentra presente la noción de función en donde se menciona que una variable depende de la otra, además se menciona que la razón misma podrá converger a un límite que es el valor de la derivada para un punto, es decir el valor de la tangente en ese punto, también se dice que este límite puede ser positivo o negativo, por lo tanto se esta hablando de una función creciente o decreciente comprendida entre los dos límites mencionados aunque esto último no se menciona explícitamente ni se muestra gráficamente, otra situación importante que se menciona es el carácter variacional que tiene la tangente, pues dice claramente que cuando la razón tiende a un límite, este tiene un valor determinado para cada valor particular de la x, notamos que también se encuentra presente la idea de que el segmento curvilíneo que va del punto $f(x)$ a el punto $f(x+i)$ es igual a el segmento rectilíneo que se encuentra presente entre esos mismos puntos, siempre y cuando $\Delta x = i$ sea un incremento infinitamente pequeño, esta idea ya se encontraba presente entre

Newton y Leibniz, ya que la explicaban con gran detalle al hablar de los segmentos infinitesimales, y mediante la representación de figuras geométricas en donde se veía de manera muy clara, mediante la semejanza de triángulos las características que tenía la tangente de la curva en un punto, que es la tangente de un triángulo infinitesimal formado. Ahora todo esto también se encuentra presente, sin embargo vemos que ya no se encuentran presentes de forma explicita las ideas de tipo geométrico que fueron tan utilizadas por Newton y Leibniz y que también encontramos en los libros de difusión del Cálculo de L´Hospital y Agnesi, de hecho ya ni siquiera se menciona la palabra tangente, que aunque sabemos se encuentra presente esta idea parece ser que resulta tan evidente que no se menciona, tampoco hay una gráfica explicativa con figuras geométricas en donde se represente a una función conformada por los segmentos infinitesimales que para el caso de lo que estamos hablando sería el límite mencionado *"la razón misma podrá converger a un límite"*

Posteriormente Cauchy sigue mencionando en su obra la forma de nombrar a la derivada y la nomenclatura para representarla:

> *Así por ejemplo, si se toma* $f(x)=x^m$, *en donde m designa a un número entero, la razón entre las diferencias infinitamente pequeñas será*
>
> $$\frac{(x+i)^m - x^m}{i} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}i + ... + i^{m-1}$$
>
> *Y tendrá por límite la cantidad* mx^{m-1}, *una nueva función de la variable x. En general siempre será lo mismo, pero la forma de la nueva función que servirá de límite para la razón* $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ *dependerá de la forma de la función propuesta* $y=f(x)$. *Para indicar esta dependencia se da a la nueva función el nombre de función derivada, y se le designa, con ayuda de un apóstrofe, mediante la notación*
>
> $$y' \quad o \quad f'(x).$$
>
> *(Cauchy, 1823, p. 236)*

En el párrafo anterior se nos muestra que ya se le designa a la derivada como una nueva función, pero no hay explicaciones de la relación existente entre la forma de esta nueva función y el como se forma, es decir para cada valor de la tangente de la función en un punto, representa un punto de la función derivada por ejemplo cuando el valor de la tangente es igual a cero, esto quiere decir que la función derivada para ese punto de x se intersecta con el eje x , o que cuando la tangente es negativa en alguna región de la función, en esa misma región la función derivada es decreciente, por mencionar algunos ejemplos, como sabemos Cauchy es un personaje importante cuya influencia se ve reflejada en nuestro discurso matemático escolar actual. A continuación mostramos otra parte de la obra de Cauchy, su sexta lección del libro de Cálculo infinitesimal en donde se muestra el método utilizado para encontrar los máximos y mínimos:

Problema I. *La función* $y = f(x)$ *se supone continua respecto a x en la vecindad del valor particular* $x = x_0$. *Se pregunta si a partir de este valor, la función crece o disminuye mientras que se hace crecer o disminuir a la variable.*

Solución. *Sean* $\Delta x, \Delta y$ *los incrementos infinitamente pequeños y simultáneos de las variables x, y. La razón* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *tendrá por límite* $\frac{dy}{dx} = y'$. *Se debe concluir que, para los valore numéricos muy pequeños de* Δx *y para un valor particular* x_0 *de la variable x, la razón* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *será positiva si el correspondiente valor de* y' *es una cantidad positiva y finita, y negativo si este valor de* y' *es una cantidad finita pero negativa. En el primer caso, al ser del mismo signo las diferencias infinitamente pequeñas* $\Delta x, \Delta y$ *la función y crecerá o disminuirá, a partir de* $x = x_0$, *al mismo tiempo que la variable x. En el segundo caso al ser de signos contrarios las diferencias infinitamente pequeñas, la función y crecerá si la variable x disminuye y decrecerá si la variable aumenta.*

Al admitir estos principios, y al concebir que la función $y = f(x)$ *permanece continúa entre dos límites dados* $x = x_0$, $x = X$, *si se hace crecer a la variable x por grados insensibles desde el primer límite hasta el segundo, la función y crecerá siempre que su* *derivada, al ser finita, tenga un valor positivo; y será decreciente siempre que esta misma derivada tenga un valor negativo. Así la función y no podrá dejar de crecer para disminuir, o de disminuir para crecer mientras que la derivada* y' *pase de positivo a negativo o recíprocamente. Es importante observar que, en este caso, la función derivada deberá anularse si no deja de ser continua.*

(Cauchy, 1823, p. 250)

Cauchy hace una descripción del significado que tienen los signos de los valores infinitamente pequeños, los cuales están relacionados con el crecimiento y decrecimiento de los mismos, vemos sin embargo que no se auxilia para tal explicación de ninguna figura o gráfica, no se dice que la función es creciente o decreciente aunque la idea esta expuesta claramente, se relaciona el signo de los incrementos infinitamente pequeños con el signo de la derivada, cuando se dice que sí ambas diferencias son del mismo signo a partir de $x = x_0$ la derivada es positiva o cuando se menciona el caso de que ambas diferencias son de signos contrarios a partir de $x = x_0$ entonces la derivada es negativa, se dice algo también muy importante acerca de la función siempre y cuando esta sea continua, se refiere a que una función no pude dejar de crecer para decrecer ni tampoco puede dejar de decrecer para crecer siempre y cuando en ambos caso la derivada de tal función no cambie de positiva a negativa o de negativa a positiva respectivamente. Como podemos darnos cuenta en todo este discurso de Cauchy esta presente la idea de tangente aunque en lugar de mencionarla se hace alusión a su significado al hablar de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ y la relación que esto tiene con la derivada que como sabemos se refiere a la recta tangente que toca a la curva en un punto. Podemos decir que se han sustituido las imágenes gráficas y geométricas, así como sus explicaciones por expresiones matemáticas y explicaciones en donde interviene la definición de límite y continuidad. Continuando con el texto ahora se explica la noción de máximo y mínimo de una función:

Cuando un valor particular de la función f(x) rebasa a todos los valores vecinos; es decir, todos aquellos que se obtendrían al hacer variar a x en más o en menos una cantidad muy pequeña, este valor particular de la función se llama máximo.

Cuando un valor particular de la función $f(x)$ *es inferior a todos los valores vecinos, éste toma el nombre de mínimo.*

Dicho esto, es claro que si las dos funciones $f(x), f'(x)$ *son continuas en la vecindad de un valor dado de la variable x, este valor sólo podrá dar un máximo o un mínimo de* $f(x)$ *si* $f'(x)$ *se anula.*

(Cauchy, 1823, p. 250)

Posteriormente da un ejemplo en donde se muestra mediante expresiones matemáticas lo que explica con palabras:

Problema II. *Encontrar los máximos y mínimos de una función de la variable x.*

Solución. *Sea f(x) la función propuesta. Se buscarán primero los valores de x para los cuales la función f(x) deja de ser continua. A cada uno de esos valores, si es que existen, corresponderá un valor de la función y que será ordinariamente una cantidad infinita, o un máximo o un mínimo.*

Se buscarán en segundo lugar las raíces de la ecuación

$$(1) \quad f'(x) = 0$$

Con los valores de x que hacen a la función $f'(x)$ *discontinua, y entre los que se debe colocar en primer lugar aquellos que se deducen de la fórmula*

$$(2) \quad f'(x) = \pm\infty \ \ o \ \ \frac{1}{f'(x)} = 0$$

Sea $x = x_0$ *una de esas raíces o uno de esos valores. El valor correspondiente de f(x), a saber* $f(x_0)$, *será un máximo si en la vecindad de* $x = x_0$, *la función derivada* $f'(x)$ *es positiva para* $x < x_0$ *y negativa para* $x > x_0$. *Por el contrario,* $f(x_0)$ *será un mínimo si la función derivada* $f'(x)$ *es negativa para* $x < x_0$ *y positiva para* $x > x_0$. *En fin, si en* *la vecindad de $x = x_0$, la función derivada $f'(x)$ fuera constantemente positiva o negativa, la cantidad $f(x_0)$ no sería ni un máximo ni un mínimo.*

(Cauchy, 1823, p. 251)

En los párrafos anteriores no se utiliza la palabra tangente, aunque la idea se encuentra presente, ya que se trata precisamente de los métodos que hemos revisado anteriormente con otros autores en donde se nos ha dicho que los máximos y mínimos se encuentran en donde la recta tangente a la curva es paralela con el eje *x*, la forma en como se encuentran los máximos y mínimos de acuerdo a Cauchy ya es muy parecida a el algoritmo que se menciona en textos que actualmente se utilizan en los ambientes escolares, de nueva cuenta no es utilizado en el discurso el uso de las gráficas ni una explicación de tipo geométrica, la cual es sustituida por la explicación de que $f'(x) = 0$ y el cambio de signo de la derivada antes y después del punto $x = x_0$ el cual es una de las raíces al hacer la derivada igual a cero. A continuación se muestra un problema expuesto por Cauchy para determinar la inclinación de una curva en un punto dado.

Problema III. *Determinar la inclinación de una curva en un punto dado.*

Solución. *Consideremos a la curva que tiene por ecuación, en coordenadas rectangulares, $y = f(x)$. En esta curva, la cuerda trazada desde el punto (x, y) hasta el punto $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ forma, con el eje de las x prolongado en el sentido positivo, dos ángulos, uno agudo y el otro obtuso. De estos ángulos el primero mide la inclinación de la cuerda con respecto al eje de las x. Si el segundo punto se aproxima a una distancia infinitamente pequeña del primero, la cuerda se confundirá sensiblemente con la tangente de la curva trazada en ese punto; y la inclinación de la cuerda, respecto al eje de las x, deviene la inclinación de la tangente o bien la inclinación de la curva respecto a el mismo eje. Dicho esto, ya que la inclinación de la cuerda tendrá por tangente trigonométrica al valor numérico de la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, es claro que la inclinación de la* *curva tendrá por tangente trigonométrica el valor numérico del límite hacia el cual converge esta razón; es decir, el valor numérico de la función derivada* $y' = \frac{dy}{dx}$.

Si el valor de y' *es cero o infinito, la tangente a la curva será paralela o perpendicular al eje de las x. Y esto es ordinariamente lo que sucede cuando la ordenada y deviene un máximo o un mínimo.*

(Cauchy, 1823, pp. 253 – 254)

Comentarios finales sobre el análisis de Cauchy

La noción de tangente variable no es enunciada como tal en el discurso que utiliza Cauchy, sin embargo notamos que la idea se encuentra presente en la definición de derivada que da Cauchy, ya que como sabemos $\tan\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ siendo α el ángulo formado por un triángulo rectángulo cuyo cateto opuesto es Δy y cuyo cateto adyacente es Δx y al estar hablando de incrementos infinitamente pequeños podemos decir que se forma un triángulo infinitesimal cuya hipotenusa es infinitamente pequeña, sí hacemos un retrospectiva con lo mencionado por L´Hospital acerca de que una curva esta formada por segmentos infinitesimales vemos que efectivamente se esta hablando de lo mismo pero con argumentos diferentes, Cauchy menciona que la razón misma de los incrementos infinitamente pequeños convergerán a un límite, notamos como esas ideas de tipo geométrico y apoyos visuales a través de las gráficas han desaparecido han sido sustituidas por argumentos analíticos en donde se emplea el formalismo matemático, sin embargo la idea de la derivada como función utilizada por Lagrange es conservada por Cauchy, su discurso tuvo gran influencia tanto en los ambientes eruditos como en el ámbito escolar, de hecho su influencia se puede percibir hasta nuestros días, de tal forma que ideas como la de tangente variable que no es mencionada por él, se encuentra también ausentes en nuestros ideas tal y como lo hemos mencionado en este trabajo en nuestros antecedentes de investigación y planteamiento del problema.

Nos damos cuenta que en el discurso de Cauchy en lo que se refiere a la explicación de la inclinación de una curva, esas ideas manejadas por el son prácticamente iguales a lo que actualmente se maneja en los textos escolares como la interpretación geométrica de la derivada, aunque en los libros de texto contemporáneos, como por ejemplo el Cálculo Diferencial e integral de Granville, Ed. Noriega o el Cálculo de Swokowski, además utilizan una gráfica en donde se representa una función y la cuerda que conforme $\Delta x \to 0$ su límite es el de la recta tangente a la curva. Cauchy define a la recta tangente a la curva en un punto como el valor numérico de la función derivada en el punto en cuestión. Lo anterior muestra que efectivamente la obra de Cauchy se ve reflejada hoy en día en nuestros sistemas escolares.

Obra de texto contemporáneo

William Anthony Granville (1864-1943)

Autor de uno de los libros que se ha utilizado por más de 100 años en diversas escuelas de nivel medio superior y superior, este libro es Elements of the differential and integral calculus, fue profesor de matemáticas por mas de 15 años y la primera edición del libro mencionado salio publicado en 1904, posteriormente le hace una revisión a esta primera edición y la nueva edición ya revisada se publica en1911, esta versión es prácticamente la misma a la que vamos a revisar que es la vigésimo novena reimpresión en español que salio en el año 2000, la diferencia prácticamente tan solo consiste en la distribución de los temas; Granville nace 7 años después de la muerte de Cauchy, y siendo este un matemático de tan alta importancia e influencia, consideramos que sus ideas se pueden percibir en el libro de texto de Granville, escogemos este libro de texto ya que al ser editado en 1904, consideramos conserva ideas de la matemática del siglo XIX, pero además es un texto escolar que se sigue vendiendo y utilizando más de 100 años después de su primera edición, por otro lado el tratamiento que le da a la tangente es similar al de libros contemporáneos de Cálculo publicados recientemente. Veamos ahora cual es el tratamiento que le da Granville en su obra a la idea de tangente variable:

CAPITULO III

DERIVACION

2.1 Introducción. *En este capítulo vamos a investigar como varía el valor de una función al variar la variable independiente. El problema fundamental del Cálculo Diferencial es el de establecer con toda precisión una medida de esta variación. La investigación de problemas de esta índole, problemas que trataban de magnitudes que variaban de una manera continua, llevó a Newton al descubrimiento de los principios fundamentales del Cálculo infinitesimal, el instrumento científico más poderoso del matemático moderno.*

2.2 Incrementos. *El incremento de una variable que pasa de un valor numérico a otro es la diferencia que se obtiene restando el valor inicial del valor final. Un incremento de x se representa por el símbolo* Δx *que se lee "delta x". El estudiante no debe de leer este símbolo "delta veces x"*

Es evidente que el incremento puede ser positivo o negativo, según que la variable aumente o disminuya al cambiar de valor.

Asimismo,

Δy *significa incremento de y,*

$\Delta \phi$ *significa incremento de* ϕ*,*

$\Delta f(x)$ *significa incremento de f(x), etc.*

Si en y=f(x) la variable independiente x toma un incremento Δx*, entonces* Δy *indicará el incremento correspondiente de la función f(x) (o sea de la variable dependiente y)*

El incremento Δy *siempre ha de contarse desde el valor inicial definido de y, que corresponde al valor inicial arbitrariamente fijado de x desde el cual se cuenta el incremento* Δx*. Por ejemplo, consideremos la función*

$$y = x^2$$

Si tomamos x = 10 como el valor inicial de x, esto fija y = 100 como valor inicial de y. Supongamos que x aumenta hasta x = 12, es decir, $\Delta x = 2$*;*

y aumenta hasta y = 144,   y Δy = 44.

Si se supone que x decrece hasta x = 9, es decir Δx = -1;

y decrece hasta y = 81,   y Δy = -19.

*En este ejemplo, y aumenta cuando x aumenta, y **y** decrece cuando x decrece. Los valores correspondientes de Δx y Δy tienen un mismo signo. Puede acontecer que y decrezca cuando x aumenta, o viceversa; Δx y Δy tendrán entonces signos contrarios.*

Granville, traducción al español por Steven T. Byngton, pág. 25 y 26

En la introducción que da Granville a este capítulo explica de forma explícita y clara el problema fundamental del Cálculo Diferencial, que es el establecer con toda precisión una medida de la variación, posteriormente explica a lo que le llama incremento y la forma de cuantificarlo que es restándole a el valor inicial un valor final, nos muestra también la simbología para representar a los incrementos, posteriormente explica que al cambiar o incrementarse la variable independiente también cambia o se incrementa la variable dependiente aunque no necesariamente en la misma proporción tal y como se ve en el ejemplo mostrado, aclara también que cuando Δx no necesariamente significa esto que también Δy tenga que crecer ya que podría suceder lo contrario. Revisemos ahora lo siguiente:

2.3 Comparación de incrementos. Consideremos la función

(1) $y = x^2$

Supongamos que x tiene un valor inicial fijo y le damos después un incremento Δx. Entonces y tomará un incremento correspondiente Δy, y tendremos:

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2,$$

O sea, $y + \Delta y = x^2 + 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$

Restando (1), $y \quad = x^2$

(2) $\Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$

Obtenemos el incremento Δy *en función de x y* Δx.

Para hallar la razón de los incrementos, basta dividir los dos miembros de (2) por Δx*, y resulta:*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Si el valor de x es 4, es claro (Art. 16) que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8$$

Observemos ahora con cuidado, mediante una tabla, cómo se comportaba la razón de los incrementos de ***x*** *y de* ***y*** *cuando el incremento de x decrece.*

Valor Inicial de x	*Valor final de x*	*Incremento* Δx	*Valor Inicial de y*	*Valor final de y*	*Incremento* Δy	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
4	5.0	1.0	16	25	9	9
4	4.8	0.8	16	23.04	7.04	8.8
4	4.6	0.6	16	21.16	5.16	8.6
4	4.4	0.4	16	19.36	3.36	8.4
4	4.2	0.2	16	17.64	1.64	8.2
4	4.1	0.1	16	16.81	0.81	8.1
4	4.01	0.01	16	16.0801	0.0801	8.01

Esta tabla pone de manifiesto que al decrecer Δx *también disminuye* Δy*, mientras que la razón de los dos incrementos toma los valores sucesivos 9, 8.8, 8.6, 8.4, 8.2, 8.1, 8.01.*

Esta sucesión de valores nos dice que podemos hacer que el valor de la razón $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *sea tan próximo a 8 como deseamos con sólo tomar a* Δx *suficientemente pequeño. Luego,*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 8$$

(Granville, 2000, pp. 26 – 27)

Con lo anterior Granville muestra como al hacer el valor de Δx tan pequeño que tiende a cero, el valor de la razón de los incrementos se acerca a 8 cada vez más y más, tanto como lo deseemos, esta afirmación nos dice que la razón de los incrementos se esta acercando a un número cada vez más y más a un valor y en el límite llegará a ese valor, tal valor como sabemos es la tangente del ángulo de inclinación ya que la tangente esta definida por $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, aunque esto no se menciona en este momento, tampoco se dice que al efectuar esta operación se esta considerando que hay una relación lineal entre Δx *y* Δy siempre y cuando Δx tienda a cero, cuando nos referimos a una relación lineal queremos decir lo siguiente: cuando en la expresión: $\Delta y = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$, o inclusive tratándose de otra expresión diferente en donde hubiera inclusive Δx con exponentes iguales a 2 o mayores, se desdeñarían todos esos términos, tomándose en cuenta solo aquellos términos que tuvieran un Δx con exponente igual a uno, podemos darnos cuenta que Δy también tiene exponente uno por lo tanto la relación existente entre los incrementos es de tipo lineal ya que ambos tienen por exponente a la unidad, sí recordamos a Euler el representaba a lo que nosotros le llamamos Δx por ***t*** y a Δy por ***u*** de tal forma que el representaba la relación entre los incrementos por un polinomio del tipo: $0 = At + Bu + Ct^2 + Dtu + Eu^2 + Ft^3 + Gt^2u + Htu^2 + \&c.$ en donde solo tomaba en cuenta los términos cuyo exponente es 1, quedando una expresión del tipo $0 = At + Bu$ que es una expresión de tipo lineal la cual representa gráficamente la hipotenusa de un pequeño triángulo cuyos catetos están formados por los muy pequeños segmentos Δx y Δy. A continuación vamos a ver como define Granville la derivada, en la definición se encuentra implícita la idea de tangente variable, veamos:

2.4 Derivada de una función de una variable. *La definición fundamental del Cálculo Diferencial es la siguiente:*

La derivada de una función es el límite de la razón del incremento de la función al incremento de la variable independiente cuando éste tiende a cero.

Cuando el límite de esta razón existe, se dice que la función es derivable o que tiene derivada.

La definición puede darse mediante símbolos, en la forma siguiente:
Dada la función

(1) $$y = f(x),$$

Consideremos un valor inicial fijo de x.
Demos a x un incremento Δx *; entonces obtenemos para la función y un incremento* Δy *, siendo el valor final de la función*

(2) $$y + \Delta y = f(x + \Delta x).$$

Para hallar el incremento de la función, restamos (1) de (2); se obtiene

(3) $$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Dividiendo los dos miembros por Δx *, incremento de la variable independiente, resulta:*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

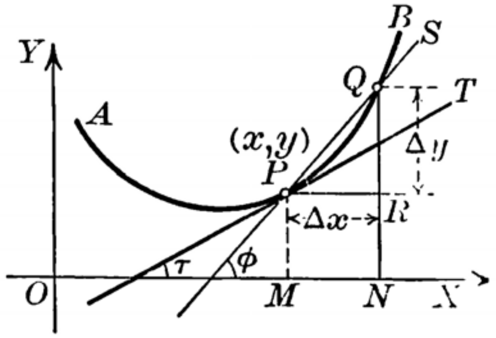
El límite del segundo miembro cuando $\Delta x \to 0$ *es, por definición, la derivada de f(x), o sea, según (1), de **y**, y se representa por el símbolo* $\frac{dy}{dx}$*. Luego, la igualdad*

(A) $$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

(Granville, 2000, pp. 27 – 28)

La idea de la tangente variable se encuentra, aunque ya no se enuncia explícitamente como en Cauchy cuando dice "*Este límite, cuando existe, tiene un valor determinado para cada valor particular de x*" en lugar de ello se habla del límite de la razón de los incrementos, como sabemos esta razón de incrementos es precisamente la tangente, algo que tampoco se dice es que la función derivada se va formando con cada uno de los valores de la tangente en cada punto de la función, tal y como lo mencionaba Euler explícitamente, posteriormente mediante simbología se representa a la derivada como un límite de la razón de los incrementos, cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero, en esta definición se encuentran presentes ideas no enunciadas explícitamente como son que el segmento curvilíneo formado por los puntos $f(x+\Delta x)-f(x)$ tiende a ser un segmento rectilíneo conforme Δx tiende a cero y que es también la hipotenusa de un triángulo cuya hipotenusa es demasiado pequeña cuyos catetos son Δx y Δy, además la relación entre el Δy y el Δx es de tipo lineal (por lo mencionado anteriormente) y es precisamente esa relación lineal la que representa un segmento extremadamente pequeño de la función que es igual a la recta tangente en un punto de la misma y al decir un punto de la misma nos estamos refiriendo a que la tangente esta cambiando para cada punto de la función es decir estamos hablando de una tangente variable que nos da información de la función, información de la medida de la variación de la variable dependiente con respecto a la variable independiente, también podemos saber con el signo de esta tangente sí se trata de una región en donde la función es creciente o decreciente, también nos puede dar información sobre los puntos máximos y mínimos. Sí continuamos con nuestra revisión:

> ***28. Interpretación geométrica de la derivada.*** *Ahora vamos a considerar un teorema que es fundamental en todas las aplicaciones del Cálculo Diferencial a la Geometría. Primero es necesario recordar la definición de tangente a una curva en un punto P de la misma. Supongamos una secante que pasa por P y un punto próximo Q de la curva (fig. 6). Hagamos que el punto Q se mueva sobre la curva aproximándose indefinidamente a P. La secante girará alrededor de P, y su posición límite es por*



definición la tangente a la curva en P. Consideremos ahora la grafica de la función f(x), o sea la curva AB (fig. 6), dada por la ecuación (1) y = f(x).

Procedamos ahora a derivar la función (1) según la regla general y a interpretar cada paso geométricamente. Para ello escogemos un punto P(x,y) de la curva, y un segundo punto $Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$*, también de la curva y cercano a P.*

Figura 6

Primer paso $\quad y+\Delta y = f(x+\Delta x) = NQ$

Segundo paso $\quad y+\Delta y = f(x+\Delta x) = NQ$

$$y \qquad = f(x) \qquad = MP = NR$$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = RQ$$

Tercer paso $\quad \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \dfrac{RQ}{MN} = \dfrac{RQ}{PR}$

$$= tg\angle RPQ = tg\phi$$

Con este paso vemos que la razón de los incrementos Δy *y* Δx *es igual a la pendiente de la secante determinada por los puntos*

$$P(x,y) \text{ y } Q(x+\Delta x, y+\Delta y)$$

En la gráfica de f(x).

Examinemos el sentido geométrico del cuarto paso. Ahora se considera el valor de x como fijo. Luego P es un punto fijo de la gráfica. Asimismo, Δx *varía tendiendo a cero. Por tanto, es evidente, el punto Q ha de moverse a lo largo de la curva y aproximarse a P como posición límite. Luego la secante PQ girará alrededor de P y tendrá como límite la tangente en P. En la figura,*

$$\phi = \textit{inclinación de la secante PQ,}$$

$$\tau = \textit{inclinación de la tangente PT}$$

Luego $\lim_{\Delta x \to 0} \phi = \tau$ *Suponiendo que* $tg\phi$ *es una función continúa*

(véase el Art. 70) tenemos:

Cuarto Paso $\dfrac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} tg\phi = tg\tau$

$= \textit{pendiente de la tangente en } P.$

Así hemos establecido el importante teorema siguiente:

Teorema. *El valor de la derivada en cualquier punto de una curva es igual a la pendiente de la tangente a la curva en aquel punto.*

(Granville, 2000, pp. 32 – 33)

En esta explicación de Granville comienza por suponer una secante, como sabemos la secante la podemos definir[5] como aquella línea recta que corta a una curva en dos puntos pudiendo ser esta curva una circunferencia, parábola, elipse, etc. Aunque esto último no lo aclara Granville, sin embargo por la forma en como esta hecha la figura, la definición concuerda con ella, posteriormente explica que esta secante girará sobre el punto *P* y que su posición límite es por definición, la tangente a la curva en *P*, sí por definición Granville se refiere a que se puede definir la tangente de la siguiente forma: tangente es la línea recta que “toca” en un punto a una curva[6] además por como esta dispuesta la figura esta definición concuerda con la figura y todo hace suponer que la tangente toca a la curva en un solo punto, claro esta que en la figura así se observa, pero como se sabe para curvas diferentes a las cónicas esto no necesariamente es así, pero esto tampoco se aclara, otra idea

[5] http://etimologias.dechile.net/?secante
[6] http://etimologias.dechile.net/?tangente

que se encuentra implícita en la interpretación geométrica por el método de los cuatro pasos es la de la tangente trigonométrica, como aquella conformada por la hipotenusa del triángulo muy pequeño cuyos catetos son los segmentos que tienden a cero Δx e Δy esta información no se enuncia, como tampoco se dice que la curva y la recta son una misma en el punto de contacto, el cual es un segmento que tiende a cero, que naturalmente esta cambiando y por lo tanto también la tangente en cada punto de la curva. La información que se puede ganar al saber que la recta tangente a la curva y la curva tienen las mismas características en ese punto de contacto el cual es un segmento infinitamente pequeño se pierde al decir o suponer que la recta tangente a la curva es aquella que toca a la curva en un solo punto que es el de contacto, en el texto esta más bien enfocado a el ángulo de inclinación de la recta tangente, pero jamás relaciona de manera explícita que sí Δx es muy pequeño el triángulo muy pequeño que se forma es semejante con el triángulo conformado por los puntos *Q*, *N* y el punto de intersección de la recta con el eje *X*, esta información también se pierde.

Comentarios finales acerca del análisis de Granville.

Primero observamos que el concepto de tangente variable no es manejado como tal, sin embargo se encuentra presente en las definiciones cuando se habla del cociente de incrementos, se enuncia mediante expresiones algebraicas al hacer los desarrollos en donde se anulan los incrementos Δx con exponentes mayores que 1, también en la tabla de valores en donde Δx se hace cada vez más y más pequeño y se ve hacia donde se esta acercando el cociente de los incrementos, sí comparamos la expresión matemática: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ en donde en el siguiente paso se hace que $\Delta x \to 0$ con la explicación de Cauchy equivalente: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ en la cual Cauchy dice que $\Delta x = i$ también Cauchy sigue mencionando en su definición que: "*Pero mientras que estos dos términos se aproximan indefinidamente y de manera simultanea al límite cero, la razón misma podrá converger a un límite*" tal y como lo vimos en el análisis de Cauchy visto anteriormente, también dice que Δx se hace infinitamente pequeño, esta expresión es equivalente a lo enunciado por Granville $\Delta x \to 0$, vemos que el discurso enunciado por

Granville es muy semejante a el enunciado por Cauchy, sin embargo de este último sí se puede entender de forma un poco más explícita que la tangente es variable cuando dice: "*Este límite, cuando existe, tiene un valor determinado para cada valor particular de x*" , vemos entonces grandes similitudes en lo enunciado por Cauchy y Granville, es importante que hagamos la distinción del propósito de ambas obras ya que mientras Cauchy escribe una obra erudita, la obra de Granville es un texto escolar cuya intención es ayudar en la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral, el modelo propuesto por Granville de la interpretación geométrica de la derivada es el mismo que ha sido demostrado en investigaciones realizadas por ejemplo en González (1999) que ha dificultado el entendimiento de la derivada de manera adecuada, este esquema es una representación gráfica de lo enunciado por Cauchy en la parte de su obra que analizamos en este mismo trabajo de investigación, podemos decir entonces que el discurso mostrado en libro de Granville es muy parecido a lo enunciado por Cauchy, al volver a retomar nuevamente a Cauchy podemos ver que casi no se auxilia de la Geometría a diferencia de los iniciadores del Cálculo, Newton y Leibniz en donde podemos decir que nació el Cálculo con la ayuda de la Geometría sin embargo esa forma de abordar el Cálculo se fue perdiendo hasta lograr una sistematización con Cauchy una sistematización en donde se ha privilegiado lo analítico y los desarrollos algorítmicos, que es muy parecido a lo que se vive en los ambientes escolares actuales tal y como ha sido documentado en nuestros antecedentes de investigación.

A manera de cierre

Hemos dado un viaje por algunos momentos en los que hemos observado los usos de la idea de tangente a una curva, iniciamos con la concepción que se tenía en la antigua Grecia de que la tangente tocaba a la curva en un solo punto de la misma, es decir se tenia una concepción global de la recta tangente, esta idea prevaleció por mucho tiempo, casi tanto como importante fue para la humanidad la Geometría, prácticamente todos los matemáticos que la utilizaban al hacerlo tenían argumentaciones de tipo geométricas y se auxiliaban de gráficas para dar sus explicaciones, tenemos los casos de Copérnico, Galileo, Fermat, Descartes y Barrow, la diferencia entre ellos fue el uso que se le dio a la tangente ya que por ejemplo en lo que revisamos con respecto a Galileo el tan solo la usaba como herramienta para obtener otros resultados en sus argumentaciones geométricas, en el caso de Descartes el la utilizaba para poder conocer las propiedades de las curvas, sin embargo al utilizarla se conservaba la idea estática de la tangente, hubo también algunos otros que la entendían como algo que se confundía con la curva en un segmento infinitamente pequeño o empezaban a intuir ideas de tipo variacional, podemos mencionar entre estos casos a Copérnico y Fermat, en el caso de Barrow estuvo a punto de comprender a la tangente no como algo estático sino como algo variacional, opinamos que con el se vive un punto de transición en la historia del Cálculo entre ideas de tipo estático e ideas de tipo variacional, es con Newton y Leibniz que la tangente adquiere su carácter dinámico ya que es concebida como un cociente entre fluxiones con Newton o como un cociente de diferenciales con Leibniz, ambas ideas muy parecidas a la definición actual de derivada, en esa época la Geometría servía para describir fenómenos físicos, es decir mediante modelos geométricos se podía describir los movimientos de los cuerpos, por otro lado la tangente de una curva proporcionaba características de la misma en un instante dado, como sabemos también por esa época surge un programa emergente cuya intención es el poder predecir fenómenos, esta predicción se basa en conocer las características de un estado presente, para poder conocer, predecir como se comportaría un estado vecino es por eso que al conocer la tangente en un punto de una curva, la cual podía representar el movimiento de un cuerpo se tenía información valiosa que podía auxiliar en la predicción de los fenómenos cuyo modelo matemático correspondiera con el de uno geométrico.

Con respecto a los textos de difusión del saber se manejaban ideas de tipo variacional con respecto a la tangente, por ejemplo en el caso de la obra de L´Hospital se dice que una curva se considera compuesta por un numero infinito de segmentos infinitesimales, donde cada pequeño segmento tenia una distinta inclinación y al extender este pequeño segmento en ambos sentidos se obtiene la recta tangente, esta definición nos permite ver de una forma muy clara el carácter variacional de la tangente, consideramos esta idea muy valiosa ya que de manera natural se comprende que al ser la recta tangente a la curva y la curva una misma cosa, se pueden conocer características de la curva a partir de conocer las características de la recta tangente, características como sí la curva en la región considerada es creciente, decreciente, rapidez de cambio, si hay un máximo o un mínimo, conocer inclusive el comportamiento de cambio de la derivada, es decir sí la tangente es primero positiva después vale cero para pasar a tomar un valor negativo, entonces podemos ver gracias a este comportamiento que en esa región donde la tangente tiene valores de (positivo-cero-negativo) la segunda derivada es negativa en toda esa región por la primera derivada una función decreciente, todas estas situaciones consideramos se desprenden de manera más o menos sencilla al visualizar a la recta tangente a la curva en diferentes puntos de la misma.

Es a partir de Euler en donde comienza un abandono por los argumentos de tipo geométrico y se empiezan a sustituir por desarrollos algebraicos para obtener expresiones analíticas, al revisar el trabajo que hace con la tangente en su obra Introduction A L' Analyse Infinitesimale, Tome Second , podemos percatarnos de ello, ya no hay tantas figuras ni argumentos de tipo geométrico, aunque no hay un abandono total puesto que utiliza los conceptos de tangente trigonométrica, semejanza de triángulos, arcos pero a su vez también utiliza desarrollos algebraicos y analiza expresiones algebraicas para llegar a conclusiones. Es importante mencionar que es el primero en mencionar de una manera explicita el carácter variacional que tiene la tangente lo cual coincide también con que al hacer sus análisis el deja que transcurra el tiempo para obtener una expresión algebraica en donde se representaran los cambios que estaban ocurriendo, era importante describir los cambios, cuantificar los cambios y la tangente dinámica permitía esto. Posteriormente analizamos a Lagrange en el se ve un abandono por las ideas de tipo geométrico utiliza desarrollos algebraicos para obtener una expresión analítica, es al analizar estos desarrollos en donde encontramos expresiones (funciones) que representan a la tangente, aunque no se le mencione como tal, pero además es una tangente dinámica. Lagrange ya habla de funciones y se le considera a la derivada una función, al hacer esta consideración se pierde del discurso la tangente dinámica se le sustituye por un concepto más amplio que es la derivada, esto no quiere decir que no se encuentre presente la tangente dinámica ya que como dijimos se encuentra implícita en los desarrollos aunque ya no se mencione. Después analizamos a Cauchy quien creemos marco el discurso matemático de su época y ha influido en el discurso matemático escolar actual, con el se logra una gran sistematización y rigor matemático se pierden casi por completo las explicaciones de tipo geométrico y los gráficas como auxilios visuales en las explicaciones que da, son sustituidos por desarrollo rigurosos algebraicos, cuando posteriormente revisamos el texto escolar de Granville vemos que conserva muchas de las ideas de Cauchy aunque existe una transposición didáctica puesto que la intencionalidad de las obras es distinta, al revisar el libro de texto mencionado vemos que se vuelven a poner imágenes como auxilio didáctico, a su vez los contenidos están divididos por capítulos y temas incluso las diferentes formas de conceptualizar a la derivada son expuestos por separado, esto corresponde a objetivos de un programa escolar que también esta divido en partes es decir hay un cambio de la obra de Cauchy a lo planteado por Granville, también en este último se observa la implementación de problemas resueltos y por resolver que se encuentran expuestos de menor a mayor grado de dificultad, pero con Granville se retoma el hecho de la sistematización es decir hacer desarrollo algebraicos o aplicar algoritmos que para es caso de los ambientes escolares no es benéfico puesto que los alumnos aprenden a hacer desarrollos algebraicos, aprenden pasos a seguir por ejemplo para obtener a un máximo o un mínimo pero no entienden los conceptos.

Capítulo V

Conclusiones

Capítulo V

Conclusiones

Conforme se ha desarrollado esta investigación nos hemos dado cuenta primero, que en el trabajo llevado a cabo en las clases de Cálculo Diferencial, se le ha dado prioridad a los desarrollos algebraicos y a la algoritmia, al situarnos en el caso específico de la derivada el cual tiene implícito el concepto de tangente variable, también se ha trabajado de esta misma forma, ha sido documentado de manera suficiente que esto no es lo único que se requiere para lograr un aprendizaje, se requiere que se entiendan los conceptos, que estos tengan un significado que pueda ser manifestado al aplicar los conceptos aprendidos en diferentes situaciones que así lo requieran, por otro lado los escenarios tradicionales planteados a los alumnos no los proveen de las herramientas necesarias para construir los conceptos vistos en Cálculo Diferencial desde un punto de vista variacional, la forma clásica de representar la derivada desde un punto de vista geométrico utiliza el modelo de la familia de las secantes cuyo límite es la recta tangente a una curva, este modelo, se ha demostrado que no funciona "adecuadamente", (Cantoral,2000; González, 1999) ya que los trabajos de investigación realizados al respecto así lo han demostrado, sin embargo los profesores de matemáticas lo han seguido utilizando ya que esta representación se encuentra en varios libros de textos contemporáneos y los profesores toman los conceptos tal y como vienen presentados en los libros sin asumir una posición critica en cuanto la forma en como presentar los conceptos a los alumnos, por el contrario regularmente retoman los ejemplos de los libros tal y como están expuestos y se reproducen como tal en los salones escolares casi sin hacerles ningún cambio. Por otro lado el uso que se le ha dado a el concepto de recta tangente a una curva en las aulas, es casi nulo, se explica la interpretación geométrica de la derivada pero este conocimiento prácticamente no es utilizado ya que se privilegian los aspectos algorítmicos y algebraicos, sin embargo hemos visto en este trabajo que la resolución del problema de las tangentes fue uno de los cuales propició el nacimiento del Cálculo Diferencial, actualmente se ha relegado el estudio de la tangente a una curva; el concepto de tangente dinámica sigue estando presente a pesar de que no se le de la importancia debida en el curso de Cálculo. La tangente de una recta se ve en el estudio de la Geometría Euclidiana y el manejo que se le da es parecido a el que le dieron los Griegos en la antigüedad en donde se consideraba que una recta tangente a una curva es aquella que la toca a en un solo punto de la misma sin volverla a tocar en otro lado. En el curso de Geometría Analítica se trata el tema de tangente del ángulo de inclinación aunque más bien no se le da tanta importancia como a la pendiente, como sabemos $m = tg\alpha$, se habla más frecuentemente de la pendiente como un número que se le asocia a una recta sin que los alumnos sepan realmente que significado tiene ese número por lo tanto a la pendiente no se le conceptúa como algo que permite ver los cambios, por el contrario lo que se hace es utilizarla para la resolución de otros problemas de mayor complejidad, los alumnos sólo lo que hacen es aprender una fórmula para calcularla sin darle algún significado. Cuando los estudiantes cursan la materia de Cálculo se les menciona que hay una tangente variable, o se les deja entrever cuando se les explica lo de las funciones crecientes o decrecientes, lo cual para un profesor puede tener sentido sin embargo para un alumno esto no es tan obvio, a pesar de esto en una clase tradicional de Cálculo el establecer un vínculo entre lo que es una tangente estática y una tangente variable no es objeto de enseñanza, nosotros consideramos con base a el trabajo realizado que el ignorar esta situación es parte del problema de la falta de significados de la derivada en el plano gráfico y geométrico; como sabemos podemos saber cuanto vale la derivada en cada punto de una función y para cada uno de esos valores de la función se puede asociar una recta tangente, por lo tanto se tiene una tangente dinámica (variable), el poder concebir esto e inclusive visualizarlo gráficamente contribuye a poder entender más fácilmente el concepto de derivada, sin embargo vemos que el hablar de tangente dinámica se encuentra ausente del discurso matemático actual, se le reconoce a la derivada como un objeto de estudio, pero como dijimos al inicio, este objeto lleva implícito consigo el concepto de tangente dinámica, de tal forma que por la investigación que hemos realizado, suponemos que se puede conceptualizar a la derivada a partir del claro entendimiento de la tangente dinámica, además que ella también ayuda a visualizar más fácilmente dónde una función es creciente, dónde decreciente, así como la determinación de los máximos y mínimos.

Nuestros planteamientos iniciales en nuestro problema de investigación fue el indagar en obras antiguas si la conceptualización de tangente utilizada en cálculo atendía a alguna necesidad o problemática específica. También nos propusimos revisar si a la tangente dinámica se le daba algún tratamiento didáctico específico, para ello se planteó el revisar el contexto sociocultural que le confirió razón de ser a la tangente dinámica, todo esto fue hecho con el fin de rescatar elementos que permitan ver el origen de la tangente dinámica y mediante los cuales se pueda observar el carácter variacional de la recta tangente para darle un nuevo sentido o significado a la noción de tangente dinámica la cual es vista someramente en los libros de texto actuales. Todo lo anterior con el fin de poder tener elementos que coadyuven a la creación de secuencias de aprendizaje, en donde se construya la noción de tangente dinámica desde un punto de vista variacional. El otro objetivo hecho en el planteamiento del problema era el de resignificar el discurso matemático escolar actual con respecto a la recta tangente a una función, por uno nuevo que provea de significados consistentes con los cuales el alumno no solo aprenda pasos a seguir o elabore desarrollos algebraicos sino que aunado a esto pueda construir los diferentes conceptos vistos en la materia utilizando argumentos variacionales.

Nuestro trabajo de investigación se encuentra situado dentro de la línea de investigación del Pensamiento y Lenguaje Variacional la cual como variante investigativa posee una triple orientación, la cual tiene que ver con la dimensión cognitiva y cómo es aplicada en la resolución de fenómenos variacionales, por otro lado se ocupa también de estructuras variacionales y de su matematización y por último se ocupa de cómo pueden ser resueltos problemas de tipo variacional que se encuentran inmersos en nuestra cultura y sociedad.

Consideramos que el estudio de la tangente dinámica se puede hacer tomando como línea de investigación al Pensamiento y Lenguaje Variacional.

Se buscaron elementos en textos antiguos, el cual lo encontramos en las obras escritas por matemáticos eruditos de otras épocas, así mismo se analizaron obras de difusión del Cálculo como son las de L´Hospital y Agnesi, así como un texto escolar que es escrito por Granville.

En la Matemática Educativa existen diferentes escuelas de pensamiento con paradigma propio, la postura de nuestra investigación fue reconocer que para analizar los fenómenos de enseñanza-aprendizaje en matemáticas se requiere de un enfoque sistémico, la Teoría de Las Situaciones Didácticas provee de un enfoque sistémico y de ella hemos retomado la importancia de considerar tres elementos fundamentales en los proceso de enseñanza aprendizaje de las matemáticas, que son el alumno, el profesor y el objeto de estudio, a este conjunto se le conoce como sistema didáctico, la teoría nos explica la importancia de considerar sus interrelaciones, al abocarnos a el estudio epistemológico, es decir al considerar de dónde surge y cómo evoluciona el conocimiento así como su naturaleza, nos hemos dado cuenta que el conocimiento nace dentro de un contexto sociocultural y que este influye en el surgimiento del mismo, por lo que se requiere considerar a la socioepistemología como una aproximación teórica que considera una cuarta componente en el análisis de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, esta componente es la social, la cual al tomarla en cuenta cambia parcialmente a las otras tres componentes vistas en el sistema didáctico, la metodología de investigación utilizada en nuestro trabajo de investigación es la Ingeniería Didáctica, la cual esta constituida de cuatro fases que son la fase de análisis preliminar, la fase de concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas de la Ingeniería, la fase de experimentación y por último la fase de análisis a posteriori y la evaluación. Nuestro trabajo se encuentra situado dentro de la fase de análisis preliminar, específicamente con la componente epistemológica que forma parte de los análisis preliminares, aunque no consideramos solo la parte epistemológica estrictamente hablando, sino que se tomaron en cuenta los escenarios socioculturales de las diferentes épocas en cuestión que se analizaron, nos dimos cuenta como estos influyen en el origen y desarrollo de los conocimientos matemáticos, la cultura, por ejemplo los ambientes en donde se encontraban los matemáticos eruditos ejercen influencia en la forma en como se plasma el conocimiento matemático, ya sea para su difusión a otros matemáticos o la difusión a ambientes no eruditos, los paradigmas científicos de cada época influyen en el desarrollo de los conceptos matemáticos, los usos que se les da a los conceptos, así como las Prácticas Sociales (o la Práctica Social) asociada a el desarrollo de cada conceptos matemático, es por lo anterior que decimos considerar en este trabajo de investigación a la componente social, la cual es considerada dentro de la aproximación teórica que llamamos socioepistemología, en nuestro marco teórico establecimos a la Practica Social como aquellas acciones que nacen de las vivencias y experiencias cotidianas, realizadas por un grupo social, sí consideramos como grupo social a los matemáticos eruditos de la época de Newton, y tomando en cuenta lo que dice Cantoral (2000) con respecto a que Newton se apoyo en una epistemología sensiblemente diferente a lo que se enseña en clase acerca de la forma en que presenta por primera vez su Binomio:

> *De hecho, sostenemos que ella obedece a un programa emergente en aquella época, un programa alternativo en el campo de la ciencia, con el que se buscaba modelar, anticipar, predecir fenómenos naturales, con el respaldo matemático. Un amplio programa de matematización de los fenómenos que se podían modelar con una muy fructífera metáfora del flujo de agua, una metáfora que se aplicaría por igual a la evolución de muy diversas magnitudes reales.*

Posteriormente Cantoral, R. habla acerca de la predicción y como se construye esta a partir de las vivencias y experiencias cotidianas de los individuos y de los grupos sociales, nos menciona la importancia de conocer a partir de un modelo matemático en donde se conoce un estado inicial en P por ejemplo, como cambia P y el cambio del cambio de P, etc., al conocer estos elementos se podrá predecir un estado futuro, recordemos que en esa época algunos matemáticos representaban el movimiento de los cuerpos mediante curvas, mediante modelos matemáticos que utilizaban modelos geométricos, nosotros creemos que la noción de predicción hace que emerjan diferentes conceptos matemáticos en nuestro caso particular la noción de predicción hace que emerja la noción de tangente variacional, ¿Por qué decimos esto? Recordemos que para conocer un estado futuro es necesario conocer el estado actual y como cambia este y el cambio del cambio, etc., la recta tangente a una curva proporciona esta información, ya que como pudimos ver producto de esta investigación la curva y la recta tangente son lo mismo en el punto de contacto, por lo tanto si conocemos las características de la recta tangente nos proporciona información de la curva en ese punto, por lo tanto podremos conocer de la curva a partir de la tangente si se trata de una función creciente o decreciente o sí hablamos de los puntos críticos, la tangente del ángulo de inclinación valdrá cero, al obtener el valor de la tangente también podremos saber cuanto cambia la variable dependiente por cada unidad de cambio de la variable independiente, además al observar el comportamiento de las tangentes podremos también determinar los signos de la segunda derivada de la función que se este analizando. Vemos entonces que la recta tangente a una curva surge como un argumento de tipo geométrico y visual que proporciona información acerca de los cambios, información requerida para poder predecir estados futuros a partir de conocer características de un estado inicial, con lo cual consideramos tal y como lo mencionamos en nuestro marco teórico que la práctica social hace que surjan objetos matemáticos para satisfacer necesidades sociales, estas necesidades son de **origen reflexivo** ya que nacen de un grupo social de comunidades científicas, cuya intención es hacer avanzar la ciencia, la tangente dinámica surge y es manifestada explícitamente por Euler, aunque recordemos que el paradigma científico de esa época era el sustituir los argumentos geométricos, por argumentos más analíticos, se fueron sustituyendo las ideas de tipo geométrico por el rigor matemático, inclusive la forma en como es presentada la información por los matemáticos eruditos que se analizaron posteriormente demuestra que también los apoyos visuales para dar explicaciones fueron desapareciendo, todo esto explica por que la tangente dinámica es sustituida cuando empieza a surgir una sistematización más rigurosa la cual es llevada a cabo con el paso de los años, y queda oculta del discurso ya que el objeto matemático que se maneja es la derivada, pero como hemos dicho y demostrado a través del análisis documental realizado, la tangente dinámica sigue estando presente en la definición misma de la derivada a pesar de que no se le menciones como tal, esta ausencia propicia desde nuestro punto de vista una dificultad didáctica y esto ha quedado suficientemente documentado en nuestros antecedentes de investigación.

Hagamos ahora un breve recorrido por momentos históricos en donde ha sido utilizada la tangente para ver cuales han sido sus usos, como fue concebida y como influyo el paradigma científico en cada época con respecto a la conceptualización que se tenia de ella. En la antigua Grecia se le concebía a la recta tangente como aquella línea que tocaba a la curva en un solo punto y no la volvía a tocar en ningún otro, como lo comentamos en nuestro análisis documental Euclides fue un matemático que tuvo una enorme influencia por muchos años en la historia de la humanidad el influyo a grandes matemáticos por muchas generaciones, su libro Los elementos ha sido uno de los más editados en el mundo superado tan solo por La Biblia, con esto queremos poner de manifiesto que la Geometría tuvo gran trascendencia en la historia de la humanidad, remontémonos a la época de Nicolás Copérnico, ciertamente se puede ver en su libro "*Sobre las revoluciones de los orbes celestes*" el uso permanente que se hace de la Geometría, las figuras mostradas en donde se observa las argumentaciones geométricas utilizadas en sus demostraciones, y es en este contexto en donde utiliza a la recta tangente, Copérnico tiene presente que la razón entre dos arcos es mayor que la razón entre la razón entre la mayor y la menor de las rectas subtendidas [cuerdas], sin embargo esta relación no permanece siempre ya que se da cuenta que conforme se van haciendo cada vez más y más pequeños estos arcos llega un momento que tal relación deja de existir, se llega un momento en que al considerar los arcos muy pequeños la razón entre sus longitudes con respecto a las cuerdas subtendidas es la misma son iguales, a lo cual el dice en su libro *…modo que, el punto de contacto extremo (de tangencia) del círculo coexisten la línea circular y la recta…*observamos en estas líneas la concepción que tenía Copérnico de la recta tangente cuando los arcos se vuelven muy pequeños, también dice *"Luego, como vemos hemos llegado a un punto, en el que la diferencia entre recta y la curva que la envuelve escapa a los sentidos, como convertidos en una sola línea"* Copérnico (1543), con lo que posteriormente utiliza estos datos obtenidos para hacer tablas que le auxiliaran en sus Cálculos astronómicos, en este caso la tangente es utilizada para fines diferentes a el desarrollo de las matemáticas, sin embargo en este vinculo existente entre la astronomía y las matemáticas vemos como concebía Copérnico a la recta tangente, en donde es notorio la relación también con la geometría y la utilización de argumentos de tipo infinitesimal así como la idea de límite. **El uso entonces que le da Copérnico a la tangente es para encontrar la razón última entre segmentos infinitamente pequeños.**

Galileo Galilei utiliza a la recta tangente en sus argumentos geométricos para la resolución de problemas en su libro *"Diálogos sobre dos nuevas ciencias"* en el caso que analizamos notamos que utiliza a la recta tangente par poder determinar la amplitud de la parábola del problema que plantea resolver, la concepción que se tiene de tangente es como la de los Griegos es decir la recta que toca a la curva en un solo punto, la cual es una concepción global de la recta tangente, vemos por tanto que Galileo utiliza a la tangente **para la creación de triángulos semejantes los cuales son indispensables en la resolución de problemas sin la cual difícilmente se podría resolver.**

Posteriormente analizamos el método de Fermat para obtener la tangente de una curva, en su método se obtiene una expresión que permite cuantificar los cambios, dado que se tiene un polinomio inicial $f(x)$ y posteriormente se obtiene otro evaluado en el mismo punto más un incremento $f(x+\varepsilon)$, al restársele a este polinomio el polinomio original se obtiene una expresión en donde hay términos que representan los cambios, esto es importante ya que se empezaban a gestar ideas de poder cuantificar el cambio, estas son ideas de tipo variacional, para obtener una expresión con la cual se calcula la subtangente debe de eliminar de su expresión los términos que contienen a ε, esta idea se aproxima a la de los infinitesimales que se eliminan por ser infinitamente pequeños, aunque Fermat no lo enuncia así de esta manera, sí se puede observar que sus ideas manejan argumentos similares a los infinitesimales, posteriormente revisamos el método de Fermat para el cálculo de los máximos y mínimos, para lo cual lleva acabo desarrollos similares a lo que actualmente sería igualar la primera derivada a cero, utiliza un modelo geométrico para su demostración con la ayuda de apoyos visuales; Fermat utiliza un método para el cálculo de la tangente y el de máximos y mínimos, ya que ahora parte de los problemas situados en esa época era precisamente el problema de las tangente y el del cálculo de los máximos y mínimos, por lo tanto en esta época el cálculo de la tangente era un problema en sí mismo, pero también era utilizado para el cálculo de los máximos y mínimos podemos decir que: **Con el método de Fermat se utilizan argumentos parecidos a los infinitesimales, tanto para calcular la tangente como para determinar los máximos y mínimos.**

Descartes planteaba que unos de los problemas que a el le interesaba más resolver era poder determinar las tangentes a las curvas, así como la normal a las mismas ya que con esto se pueden conocer las propiedades de las curvas, sin embargo en su método no se utilizan argumentos de tipo variacional, ya que se considera que la recta tangente a la curva toca a esta en un solo punto. **Descartes utiliza a la recta tangente y normal a una curva para poder conocer sus propiedades y determinar ángulos entre curvas.**

Isaac Barrow, es un matemático que lo podemos ubicar como quien marca la transición entre ideas de tipo estático con ideas de tipo variacional, Barrow nos muestra en su libro Lecciones de Geometría que existe una relación entre la recta tangente a una curva y el área bajo la misma, lo cual posteriormente es un problema que va a resolver Newton su discípulo y la resolución de este problema lo lleva también a la formulación del Cálculo Diferencial e Integral. A pesar de que Barrow muestra la relación planteada podemos ver en sus escritos se muestra que aun conserva la idea antigua de los griegos de que la recta tangente a una curva la toca a esta en un solo punto dejándola del otro lado de la recta. *En este ejemplo analizado en nuestro trabajo de investigación* ***Barrow utiliza la tangente, para mostrar la relación existente entre área bajo la curva y la tangente de la recta que toca a la misma en un solo punto.***

Posteriormente viene una etapa que la vamos a considerar como la de la formulación formal del Cálculo representada por Newton y Leibniz, en donde cada uno por separado integran una metodología que resolvía varios problemas que en esa época tenían soluciones particulares dentro de estos problemas tenemos el problema de las tangentes, máximos y mínimos, cuadraturas entre otros; es con Newton y Leibniz que se resuelve el problema de las tangentes, pero además es con ellos que adquiere su carácter variacional, cada uno de ellos utilizaba diferentes notaciones y argumentos para representar a la recta tangente a una curva ya que mientras Newton utilizaba la razón entre la fluxiones $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, Leibniz utilizaba la razón entre los diferenciales $\frac{dy}{dx}$ en el caso de Newton utilizaba como argumentos las velocidades de las fluentes para valores infinitamente pequeños del tiempo, y en el caso de Leibniz se habla de cantidades infinitamente pequeñas, es decir un cociente entre diferenciales, en ambos casos se determina la relación existente entre la recta tangente a un punto y el área bajo la curva, lo cual contribuye a la formulación formal del Cálculo Diferencial e Integral, como podemos ver ambas formulaciones son ya ideas muy parecidas a lo que conocemos actualmente como la derivada, esta es una etapa muy importante ya que finalmente se deja de concebir a la recta tangente desde un punto de vista global, tal y como la concebían los griegos en la antigüedad, sino que ahora la recta tangente tenia un carácter local ya que podría tocar a la curva en otros puntos distantes del punto de tangencia pero además la tangente adquiría características variacionales ya que con base a las argumentaciones dadas era evidente que la recta tangente a la curva es diferente para cada punto de la misma, de tal forma que con este entendimiento se resuelve el problema de los máximos y mínimos utilizando a la recta tangente y haciéndola igual a cero, en el caso de ambos para presentar y explicar sus resultados utilizan argumentos de tipos geométricos y se auxilian de las gráficas como apoyos visuales, el Cálculo nace con argumentaciones geométricas que es el paradigma imperante en esa época, es interesante observar como los escenarios socioculturales juegan un papel importante en el origen y desarrollo de las ideas, en como se presentan estas, veamos el caso de Newton en los Principios Matemáticos, a lo largo de la obra se puede ver el uso que se hace de la geometría para dar sus explicaciones de la Mecánica, Leibniz por su parte también utiliza argumentos geométricos para la presentación de sus resultados, era importante conocer cuanto cambia y como cambia una cantidad con respecto de otra en un instante dado es por eso que surgen los infinitesimales los cuales ayudan a las explicaciones del nuevo Cálculo, como ya hemos citado anteriormente el conocer cuanto y como esta cambiando una variable con respecto de otra permite el poder conocer estados futuros que era lo que lo que se pretendía ya que había una práctica social imperante en esa época que era la de la predicción y es a partir de esta práctica que podemos ver que emergen objetos matemáticos que le van a dar una respuesta a los planteamientos y necesidades existentes en los ambientes de esa época. La tangente se utiliza para poder determinar los máximos y mínimos, pero es en sí misma importante ya que al conocerla se conocen las características locales de una curva y sí además esta curva representa el movimiento de un cuerpo entonces se conocen características locales del movimiento del movimiento de un cuerpo en un instante determinado.

Con respecto a las obras cuyo propósito es la difusión de las ideas en ambientes no eruditos se observa que existe transposición didáctica con respecto a las obras que les dieron origen, en el caso de L´Hospital el utilizo los argumentos de Leibniz, sin embargo los escritos de Leibniz eran de dificultad extrema para las personas que no sabían matemáticas, eran incluso difíciles de entender para matemáticos, en cambio la obra de L´Hospital se trato de presentar en un lenguaje más sencillo, orientado hacia la difusión y se daban varios tipos de argumentos para presentar un mismo tema, a su vez también en esta obra hay algunas ideas particulares del autor como por ejemplo el teorema de L´Hospital, en el caso de Agnesi ella trato de unificar las dos visiones de Newton y Leibniz y también utilizo diferentes tipos de argumentos para explicar un mismo concepto, ella por ejemplo recurría mucho a los argumentos geométricos para sus explicaciones en Cálculo, el trabajo que se hizo en ambas obras nos muestra una forma alternativa de plantear el Cálculo, una forma en donde se utilizan argumentos de tipo geométrico, esto además nos permite reflexionar acerca de la forma en que tradicionalmente se presentan los conceptos a los estudiantes y que se ha comprobado no funciona eficazmente, estas dos obras pueden servir de referentes para retomar ideas que puedan ser utilizadas para resignificar el discurso matemático escolar.

Pasamos a ver a Euler pero para esto vamos a situarnos nuevamente en lo que estaba ocurriendo en su época, en este tiempo el Cálculo naciente era fuertemente criticado por algunas personas, era necesario empezar a abandonar las argumentaciones geométricas para pasar a un mayor rigor matemático que permitiera sentar bases más firmes para el Cálculo y es con Euler que se puede ver tal situación en su obra se observa que hay un alejamiento de las ideas de tipo geométrico ya que el pretende utilizar argumentos analíticos con los cuales se pueda cimentar mejor el Cálculo, sin embargo en el análisis que se hace de Euler para el tratamiento que le da a la tangente, se observa que este abandono no es total, el desarrolla expresiones matemáticas con las cuales se caracterizan los cambios y a partir de ellas se hace un análisis por medio del cual se justifica el despreciar ciertos términos de un polinomio en el cual están representados los cambios, los términos que se desprecian son aquellos que son demasiado pequeños, de manera que al final del polinomio planteado por Euler queda una expresión como: $0 = At + Bu$ en donde t y u representan los cambios y la relación que existe entre ellos es la de un polinomio de primer orden ya que fueron despreciados los términos con exponentes mayores que uno por ser demasiado pequeños, esta expresión también representa la hipotenusa de un pequeño triángulo con catetos infinitamente pequeños que para el caso citado estos catetos son: t y u, para dar sus explicaciones Euler utiliza argumentos geométricos y los apoyos visuales mediante una gráfica, otra cosa que se puede destacar es que Euler enuncia de manera explícita el carácter variacional que tiene la tangente, esto es relevante ya que se pretendía cuantificar y cualificar el cambio entre dos cantidades y esto se podía hacer a través del uso de la tangente, las curvas sin embargo se dejarían de analizar para analizar ahora a las funciones.

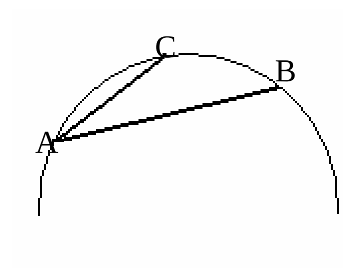
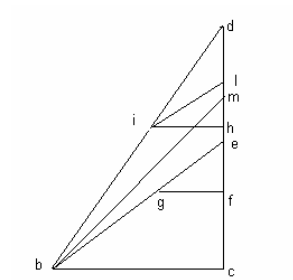
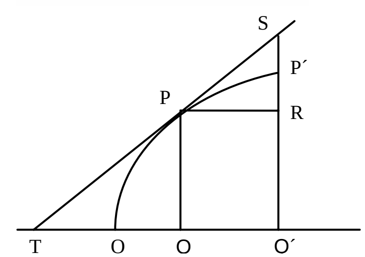
Es con Lagrange que la derivada adquiere el carácter de función, lo que establece es que cualquier función se puede representar mediante una serie de Taylor al hacer sus demostraciones no habla de rectas tangentes o una tangente dinámica, pero al estar llevando acabo sus desarrollos matemáticos se encuentra presente la expresión matemática con la cual se representa a la tangente, en el desarrollo propuesto por Lagrange hay expresiones del tipo: $P = \dfrac{f(x+i) - f(x)}{i}$ la cual representa a la tangente, pero a una tangente dinámica ya que al ser $f(x)$ una función entonces dicha tangente esta cambiando, en el desarrollo que se obtiene se observa una expresión como: $f(x+i) = fx + f'xi + \frac{f''x}{2}i^2 + \frac{f'''x}{2 \bullet 3}i^3 + \frac{f^{IV}x}{2 \bullet 3 \bullet 4}i^4 + \&c.$ en donde se puede ver que a las derivadas ya se les concibe como una función, pero en esta consideración se pierde del discurso con respecto a Euler a la tangente dinámica, no hay una explicación de cómo cada una de las rectas tangentes en cada uno de los puntos representan cada uno de los puntos de la nueva función derivada, notamos también como la práctica social de predicción se ha manifestado hasta poderse ver representada en el desarrollo de Lagrange ya que con este se puede predecir un estado futuro con base a conocer las características de cambio de la función en el estado actual, mediante el conocimiento de sus derivadas se puede predecir un estado futuro.

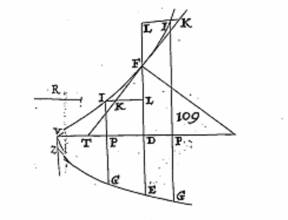
Con respecto a Cauchy podemos comentar que se llega con el a una formalización y sistematización del Cálculo con lo cual quedan sentadas bases firmes que sirvieron de sustento, el menciona la continuidad de la función y el uso de los límites, en su obra curso de análisis se observa que prácticamente no utiliza argumentos de tipo geométrico en sus explicaciones, tampoco utiliza gráficas, y no menciona a la recta tangente, mas que un problema para determinar la inclinación de una curva, pero no se hace explicito en su discurso que la tangente es un concepto que se encuentra presente en la definición de la derivada, nuevamente si analizamos las expresiones matemáticas podremos ver que se encuentra presente a la tangente y lo podemos ver en su explicación de derivada en donde se presenta la siguiente expresión: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ y a pesar de que no se dice en el discurso en la expresión que acabamos de presentar se encuentra a la tangente, y como dijimos en nuestro análisis documental el discurso de Cauchy ha tenido gran influencia en su época y esa influencia ha llegado incluso hasta nuestros días, nuevamente notamos que ideas que circulaban en el ambiente erudito de la época de Cauchy determinan la forma en como presenta sus ideas, en su época lo que se requería era un mayor rigor matemático para sentar bases más firmes en el Cálculo pero con esto desde nuestro punto de vista se pierden explicaciones valiosas didácticamente hablando, recordemos que el objeto a enseñar toma como base a el objeto de saber, claro esta que existe una transposición didáctica, aunque muchas veces esta no es la más adecuada, finalmente analizamos el texto escolar Granville y por el análisis que hicimos podemos ver que retoma en gran medida el discurso de

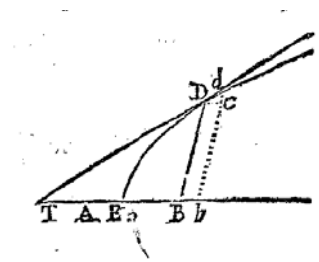
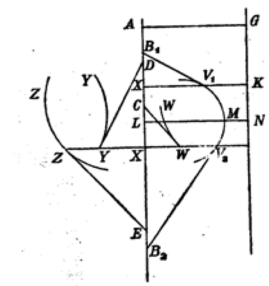
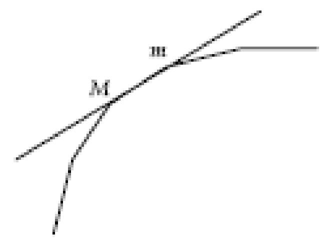
Cauchy, aunque por supuesto la distribución de los temas corresponden a las necesidades de un programa escolar, de hecho pudimos darnos cuenta que tal distribución de temas ha cambiado de su versión original de 1904 con respecto a la distribución actual, en nuestro caso revisamos la vigésimo novena reimpresión en español, la cual es prácticamente la misma que la original pero con una distribución diferente de los temas, las explicaciones que se dan en el libro de Granville están dadas por capítulos y temas y al remitirnos a la explicación que se da a los máximos y mínimos notamos que se le da un manejo a la tangente variable (no se le menciona como tal) haciendo la consideración de que se entiende de lo que se esta hablando si dar mayores explicaciones al respecto, además se maneja el modelo de la familia de las rectas secantes cuyo límite es una recta tangente y por la forma en como se manejan las ideas pareciera ser que la tangente necesariamente tiene que tocar a la tangente en un solo punto, este modelo es compartido por otros libros contemporáneos, pero como comentamos en nuestros antecedentes y problema de investigación se ha demostrado que causa problemas entre los estudiantes para entender el significado de lo que es la derivada, ni tampoco construir el concepto de derivada con argumentos variacionales.

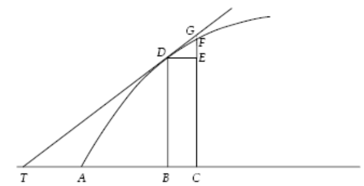
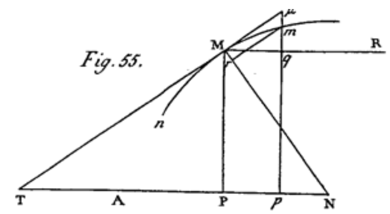
Con respecto a este trabajo de investigación se trabajaron dos componentes de la socioepistemología que fueron la componente epistemológica y la componente social, solo se estudiaron algunos momentos históricos donde fue utilizada la tangente quedaría pendiente por revisar a varios más matemáticos que contribuyeron a el desarrollo del Cálculo, por ejemplo a Lacroix, Bezout, Huygens, Weierstrass, Dedekind, D´Alambert, Taylor, Bernoulli, entre otros. Queda pendiente por trabajar la componente didáctica y la componente cognitiva, aunque en la tesis de Martínez (2005) se trabajo la pendiente y su variación, el trabajó desde el punto de vista de cómo se estudia en la materia de Geometría Analítica, y nuestro caso el trabajo que hemos hecho se refiere a la tangente dinámica, es decir la tangente a una curva (función), el producto de nuestra investigación puede contribuir para solucionar el problema planteado en la tesis de Martínez (2005) que se refiere a establecer un vinculo entre la pendiente vista como un número y como variable de tal forma que después de trabajar estas dos componentes(la epistemológica y la social), se pueden terminar las fases de la Ingeniería Didáctica y crear secuencias de aprendizaje con las cuales el alumno pueda construir la tangente dinámica desde un punto de vista variacional, al hacer esto consideramos se le facilitara construir el concepto de derivada, estamos proponiendo que para abordar el concepto de derivada, así como algunos otros conceptos vistos en Cálculo como funciones crecientes y decrecientes, máximos y mínimos desde un punto de vista variacional, esto se haga a partir de una caracterización de lo que significa la *tangente dinámica*, consideramos también que al elaborar secuencias de aprendizaje estas puedan estar siendo bien utilizadas en otros escenarios para propiciar la reproducibilidad eficaz.

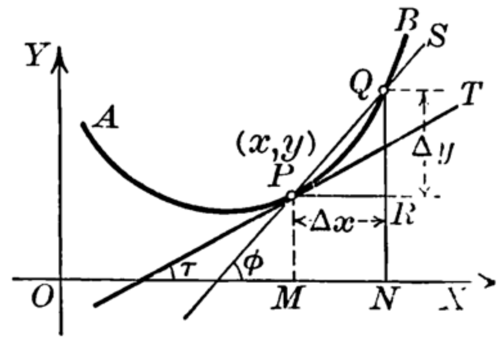
Tabla que nos muestra de forma resumida las diferentes etapas analizadas

Personaje	Usos de la tangente	Argumentos	Expresión Matemática	Figura
Copérnico	Encontrar la razón última entre segmentos infinitamente pequeños.	Ideas de tipo variacional y paso al límite	$\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{CB}} > \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}$ $\frac{\overset{\frown}{AB}}{\overset{\frown}{CB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}}$	
Galileo	Para la creación de triángulos semejantes los cuales son indispensables en la resolución de problemas	Geométricos	Explicaciones de tipo geométrico	
Fermat	Con el método de Fermat se utilizan argumentos parecidos a los infinitesimales, tanto para calcular la tangente como para determinar los máximos y mínimos.	Geométricos, semejanza de triángulos e ideas cercanas a los infinitesimales	$TQ \approx \frac{\varepsilon \bullet PQ}{P'Q' - PQ}$	 Figura 4.11

Personaje	Usos de la tangente	Argumentos	Expresión Matemática	Figura
Descartes	En este caso la recta tangente es auxiliar en las construcciones geométricas requeridas con lo cual se hacen las demostraciones. Descartes utiliza a la recta tangente y normal a una curva para poder conocer sus propiedades y determinar ángulos entre curvas	De tipo geométrico, semejanza de triángulos.	Para la tangente en el caso del ejemplo expuesto $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$	
Barrow	En el caso citado se encuentra una relación entre la inclinación de la recta tangente y el área bajo la curva.	De tipo variacional ya que encuentra una relación entre el área bajo la curva y la inclinación de la recta tangente. Conserva la visión global de la recta tangente. Geométricos, utiliza la semejanza de triángulos.	$DE \bullet DT = R \bullet DF = área VDEZ$	

Personaje	Usos de la tangente	Argumentos	Expresión Matemática	Figura
Newton	La tangente es un problema en sí mismo. Máximos y mínimos. Encuentra una relación entre el área bajo la curva y la inclinación de la recta tangente.	Cociente entre fluxiones. De tipo infinitesimal. Geométricos, semejanza entre triángulos.	$\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ $BT = \frac{3y^3 - axy}{3x^2 - 2ax + ay}$	
Leibniz	La tangente es un problema en sí mismo. Encuentra una relación entre el área bajo la curva y la inclinación de la recta tangente.	Cociente entre diferenciales. De tipo infinitesimal. Geométricos.	$\frac{dy}{dx}$	 Fig. 6
L´Hospital	La tangente es un problema en sí mismo. La utiliza para encontrar los máximos y mínimos.	De tipo infinitesimal De tipo geométrico De tipo infinitesimal De tipo variacional en donde se menciona como va cambiando el signo de la tangente.		

Personaje	Usos de la tangente	Argumentos	Expresión Matemática	Figura
Agnesi	La tangente es un problema en sí mismo. Se utiliza para encontrar los máximos y mínimos.	De tipo geométrico, semejanza de triángulos. De tipo infinitesimal Carácter variacional de la tangente	$BT = \frac{ydx}{dy}$ $DT = \frac{y\sqrt{dx^2 + dy^2}}{dy}$	
Euler	Observar el comportamiento de la curva.	De tipo analítico De tipo variacional De tipo geométrico Semejanza de triángulos. De tipo infinitesimal Hace explícito el carácter variacional de la tangente.	$PT = \frac{-Bq}{A}$	
Lagrange	Para obtener las derivadas Para obtener la expresión analítica	La derivada es una función. Algebraicos Analítico	$P = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$	
Cauchy	Para obtener la derivada. Para encontrar los máximos y mínimos Para determinar la inclinación de una curva.	De tipo analítico Límites Continuidad	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$	

Personaje	Usos de la tangente	Argumentos	Expresión Matemática	Figura
Granville	Para obtener la derivada Interpretación geométrica de la derivada. En explicaciones para obtener máximos y mínimos.	De tipo geométrico Algebraicos. Algorítmicos Límite Continuidad.	$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$	

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones y los cambios curriculares?. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.* 1 (1), 40-55

Barrow, I. (1670). *Lectiones Geometricæ*. Londres: J. Dunmore.

Barrera, A. (2002). La construcción de la derivada a través de la noción de variación en estudiantes de Nivel Superior. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (Vol. 15, Tomo I, pp. 68-73) Argentina

Cantoral, R., (2000). *Desarrollo del pensamiento matemátic*o. México: Trillas.

Cantoral, R. (2001). Sobre la Articulación del Discurso Matemático Escolar y sus Efectos Didácticos. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 14, Tomo I, pp. 70-81)

Cantoral, R. (2001). *Un estudio de la formación social de la analiticidad* México: Iberoamérica.

Cantoral, R. (1995). Matemática, matemática escolar, matemática educativa.
Programa Editorial, Serie: Artículos. Área de Educación Superior, DME, Cinvestav- IPN. México.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo.* Thomson: México.

Cantoral, R. & Farfán, R. M. (2003) .*Matemática Educativa: Una visión de su evolución*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6*(1), 27-40.

Cantoral, R., Farfán, R., Lezama, J. y Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Número Especial,* 83-102.

Cantoral, R. y Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 6 (2), 133-154.

Castañeda, A. (2004) *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*. Tesis Doctoral, CICATA-IPN, México.

Castañeda, A. (2006). Formación de un discurso escolar: el caso del máximo de una función en la obra de L´Hospital y María G. Agnesi. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 9(2), 253-265.

Cauchy, A. (1823). *Curso de Análisis*. (Trad. Carlos Jiménez) Edit. UNAM (1994)

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Aique

Colín, M.P. (2005) *Un estudio transversal sobre la raíz cuadrada.* Tesis de Maestría. CICATA-IPN, México.

Collados, M. (2007). Consideraciones sobre la historia de las Matemáticas. Historia de las Ciencias, pp. 1-21 [Versión electrónica disponible el 4 de septiembre de 2007 en http://scholar.google.es/scholar?q=Historia+de+la+geometr%C3%ADa&hl=es&lr=lang_es&start=40&sa=N].

Copérnico, N. (2003) *Sobre las revoluciones de los orbes celestes (C. Mínguez y M. Testal, Trad.)* Madrid, España: Editora Nacional. (Obra original publicada en 1543 bajo el título *De revolutionibus orbium coelestium)* Edición comentada por Stephen Hawking, A Hombros de Gigantes.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la cultura Maya.* Tesis de Maestría, CINVESTAV-IPN, México.

Descartes, R. (1637). *La geometría*. Edición Facsímil. (trad. Roberto R. García) México: Limusa.

De la Fuente Pérez, (   ) *Resolución de los problemas de la tangente, máximos y mínimos en los albores del cálculo diferencial*

Dolores, C., Guerrero, L., Martínez, M. y Medina, M. (2002). Un estudio acerca de las concepciones de los estudiantes sobre el comportamiento variacional de funciones elementales. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (Vol. 15, Tomo I, pp. 74-79) Argentina.

Dolores, C. y Guerrero, L. (2004). Concepciones alternativas que, referentes al Comportamiento variacional de funciones, manifiestan Profesores y estudiantes de bachillerato. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (Vol. 17, Tomo I, pp. 101-107) México.

Dolores, C., Alarcón, G., y Albarrán, F. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.*5 (3), 225-250.

Euler, L. (1835). *Introduction a l'analyse infinitesimale.* Paris, France: Cliez Bachelier, Imprimeur-Libraire de l'École Polytechnique.

Galileo, G. (2003) *Diálogos sobre dos nuevas ciencias* (C. Solís, y J. Sádaba) Edición comentada por Stephen Hawking, A Hombres de Gigantes. Barcelona España: Crítica (Trabajo original publicado en 1638)

Godino, J.D. (2003) *Investigaciones sobre Fundamentos Teóricos y Metodológicos de la Educación Matemática.* Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática
Granville, A. *Cálculo Diferencial e Integral. (Trad. Steven T. Byngton)* Edit. Limusa (2000). México.

González, R. (1999). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas. Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación.* Tesis de Maestría, Cinvestav-IPN, México.

Lagrange, J.L. (1797), *Théorie des fonctions analytiques.* Francia : Journal de l'Ecole polytechnique.

Leibniz, G. (1684). *Nuevos métodos para los máximos y mínimos, así como para las tangentes, que no se detiene frente a cantidades fraccionarias e irracionales, y un peculiar tipo de cálculo para esos problemas.* Acta Eruditorum (Estudio introductorio de José Babini). México

Lezama, F. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas*. Tesis de doctorado. DME-CINVESTAV-IPN, México.

L'Hospital, A. (1696). *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curva*s (estudio introductorio, traducción y notas de Rodrigo Cambray Núñez). Edit. UNAM (1998). México.

Marcolini, M. y Perales, J. (2005). La noción de predicción: Análisis y propuesta didáctica para la educación universitaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa.* 8 (1), 25-68

Martínez, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como un mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de su funcionamiento en los exponentes.* Tesis Doctoral. CICATA-IPN, México.

Martínez, R. (2005). *La Pendiente y su variación: un estudio didáctico y cognitivo.* Tesis de Maestría, Cimate-Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Meneses, G (2001). *Epistemología y Objeto Pedagógico.* México: Plaza y Valdés.

Montiel, G. (2005). *Estudio Socioepistemológico de la Función Trigonométrica.* Tesis Doctoral, CICATA-IPN, México.

Newton, I. (1687). *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural*. (Trad. Antonio Escotado) Edit. Altaza (1993). España.

Newton, I. (1671). *Tratado de Métodos de Serie y Fluxiones.* (Trad. Iztaccíhuatl Vargas) Edit. UNAM (2001). México

Perero, M. (1994). Historia e Historias de Matemáticas. México: Iberoamérica

Navarro, C. (2004). *Elaboración y funcionamiento de una Ingeniería Didáctica basada en la visualización de los límites.*
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{senx}{x}$ y $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x}$ Tesis de maestría. DME-CINVESTAV-IPN, México.

Rosado, M. y Cordero, F. (2002). La variación, la aproximación y la transformación, como un marco de reconstrucción de significados de la derivada. En C. Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* (Vol. 15, Tomo I, pp. 115-120) Argentina