INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN CIENCIA APLICADA Y TECNOLOGÍA AVANZADA

“ELEMENTOS PARA EL DISEÑO DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA EL ESTUDIO DE LA ECUACIÓN VECTORIAL DE LA RECTA”

Tesis que para obtener el grado de Maestro en Ciencias en Matemática Educativa

Presenta:
Martha Jarero Kumul

Director de Tesis:
Dr. Apolo Castañeda Alonso

México, D.F., a Mayo de 2006.

SIP-14

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL
SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

ACTA DE REVISION DE TESIS

En la Ciudad de México siendo las 11:00 horas del día 31 del mes de mayo del 2006 se reunieron los miembros de la Comisión Revisora de Tesis designada por el Colegio de Profesores de Estudios de Posgrado e Investigación de CICATA LEGARIA para examinar la tesis de grado titulada:

"Elementos para el diseño de una secuencia didáctica para el estudio de la ecuación vectorial de la recta"

Presentada por la alumna:

Jarero	Kumul	Martha Imelda
Apellido paterno	materno	nombre(s)

Con registro:

A	0	3	0	2	2	1

aspirante al grado de:

Maestro en Ciencias en Matemática Educativa

Después de intercambiar opiniones los miembros de la Comisión manifestaron ***SU APROBACION DE LA TESIS***, en virtud de que satisface los requisitos señalados por las disposiciones reglamentarias vigentes.

LA COMISION REVISORA

Director de tesis

Dr. Apolo Castañeda Alonso

Dr. Francisco Javier Lezama Andalón

Dr. Gustavo Martínez Sierra

CICATA IPN
Centro de Investigación en Cienci
Aplicada y Tecnología Avanzada
del Instituto Politécnico Naciona

Dra. Gisela Montiel Espinosa

Dra. Rocío Alejandra Muñoz Hernández

EL PRESIDENTE DEL COLEGIO

Dr. José Antonio Irán Díaz Góngora

INSTITUTO POLITECNICO NACIONAL

SECRETARIA DE INVESTIGACION Y POSGRADO

CARTA DE CESION DE DERECHOS

En la ciudad de México, D.F. el día 23 del mes de junio del año 2006, el (la) que suscribe Martha Imelda Jarero Kumul alumno (a) del Programa de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa con número de registro A030221 adscrito al Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, manifiesta que es autor (a) intelectual del presente trabajo de Tesis bajo la dirección de Apolo Castañeda Alonso y cede los derechos del trabajo titulado "Elementos para el diseño de una secuencia didáctica para el estudio de la ecuación vectorial de la recta" al Instituto Politécnico Nacional para su difusión, con fines académicos y de investigación.

Los usuarios de la información no deben reproducir el contenido textual, gráficas o datos del trabajo sin permiso expreso del autor y/o director del trabajo. Este puede ser obtenido escribiendo a la siguiente dirección Calle 26A Núm. 104 x 21 y 21A Frac. La Noria II Chuburná, Mérida, Yucatán, México. C.P. 97200. Si el permiso se otorga, el usuario deberá dar el agradecimiento correspondiente y citar la fuente del mismo.

Martha Imelda Jarero Kumul

Nombre y firma

ÍNDICE

RESUMEN i
ABSTRACT iii
GLOSARIO v
INTRODUCCION vi
CAPÍTULO 1. LAS DIFICULTADES DE LOS ESTUDIANTES 1
1.1 El paso de la geometría analítica a la geometría vectorial; los cambios en la forma en cómo se estudia la ecuación de la recta 3
1.2 Análisis a las producciones de estudiantes en el estudio de la ecuación vectorial de la recta 10
1.3 Elementos del entorno de estudio 29
1.4 Determinación de objetivos 30
1.5 Antecedentes del trabajo 32

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO 35
2.1 Ingeniería didáctica 36
2.2 Componentes del análisis preliminar 37

CAPÍTULO 3. ESTUDIO COGNITIVO 64
3.1 El cuestionario 65
3.2 La entrevista 76

CONCLUSIONES 100

BIBLIOGRAFÍA 106

ANEXOS 109
A. Transcripción primera entrevista 109
B. Transcripción segunda entrevista 129

RELACIÓN DE CUADROS

	Descripción	Pág
Cuadro 1	Datos de identificación y objetivos generales de la asignatura de Geometría analítica, programa de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán	7
Cuadro 2	Objetivos y contenidos de las unidades I y II del programa de asignatura Geometría analítica de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán	7
Cuadro 3	Actividades en clase sugeridas para la unidad II del programa de asignatura Geometría analítica de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán	8
Cuadro 4	Actividades en extraclase propuestas para la unidad II en el programa de asignatura Geometría analítica de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán	8
Cuadro 5	Bibliografía recomendada en el programa de asignatura Geometría analítica de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán	8
Cuadro 6	Reproducción de la prueba escrita del curso de Geometría analítica, analizada en este trabajo	11
Tabla 1	Descripción del nivel de conocimiento que se pone a prueba en cada reactivo que forma parte de la prueba escrita analizada en este trabajo	12
Figura 1	Modelo geométrico empleado en el estudio de la ecuación vectorial de la recta	32
Tabla 2	Resultados cuantitativos de un estudio que contrasta la estrategia tradicional y una experimental en el aprendizaje del tema superficies	34
Esquema 1	Sistema didáctico	38
Esquema 2	Sistema didáctico ampliado	38
Figura 2	Portada "Lectures on Quaternions"	49
Figura 3 (Figura II.I)	Modelo geométrico para la ecuación vectorial de la recta en Solín, R.; Nolasco, J. Victoria, A. (1984). Geometría analítica. Universidad Nacional Autónoma de México. México	55

Figura 4 (Figura 8)	Modelo geométrico para los vectores en: Hasser, N.; La Salle, J.; Sullivan, J. (1990). Análisis Matemático. Curso de introducción. Ed. Trillas. México. Vol. 1	59
Figura 5 (Figura 34)	Modelo geométrico para la ecuación vectorial de la recta en: Hasser, N.; La Salle, J.; Sullivan, J. (1990). Análisis Matemático. Curso de introducción. Ed. Trillas. México. Vol. 1	60
Tabla 3	Caracterización de las respuestas de los estudiantes a la pregunta 1 del cuestionario	69
Tabla 4	Caracterización de las respuestas de los estudiantes a la pregunta 2 del cuestionario	70
Tabla 5	Caracterización de las respuestas de los estudiantes a la pregunta 4 del cuestionario	71
Tabla 6	Caracterización de las respuestas de los estudiantes a la pregunta 5 del cuestionario	72
Tabla 7	Caracterización de las respuestas de los estudiantes a la pregunta 6 del cuestionario	73
Figura 6	Imagen bajo una transformación lineal	77
Figura 7	Modelo geométrico de la ecuación vectorial de la recta a partir de dos puntos dados	83
Imagen 1	Imagen de la respuesta de Damián a la pregunta I en la entrevista	86
Imagen 2	Imagen de la respuesta de Damián a la pregunta II en la entrevista	86
Imagen 3	Imagen de la respuesta de Damián a la pregunta III en la entrevista	87
Imagen 4	Imagen de la respuesta de Damián a la pregunta V en la entrevista	89
Imagen 5	Imagen de la respuesta de Adrián a la pregunta I en la entrevista	91
Imagen 6	Imagen de la ecuación vectorial de la recta en su descripción como conjunto, proporcionada a los estudiantes en la entrevista	92
Imagen 7	Imagen de la respuesta de Adrián a la pregunta III en la entrevista	93
Imagen 8	Imagen de la respuesta de Lidia a la pregunta I en la entrevista	96
Figura 8	Sistema didáctico	103

RESUMEN

Este trabajo se propuso identificar concepciones en los estudiantes respecto a la ecuación vectorial de la recta, con la intención de ofrecer elementos que orienten el diseño de una secuencia didáctica para el estudio de dicho concepto; el cual forma parte de la asignatura de Geometría analítica a nivel superior en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán.

El interés surge al reconocer las dificultades de los estudiantes al trabajar en un sistema tridimensional y el manejo de vectores. De tal forma que se inicia este trabajo analizando las producciones de los estudiantes en el estudio de la ecuación vectorial de la recta y de donde se concluye que entre los estudiantes existe un fuerte énfasis en reproducir el trabajo del profesor y una falta de comprensión respecto a los elementos que conforman la ecuación vectorial de la recta.

Ante la necesidad de realizar un estudio para ofrecer información para un diseño experimental, se opta por la ingeniería didáctica dado que permite considerar a los actores del sistema didáctico de forma aislada y a la vez establecer vínculos entre ellos, relacionarlos en un ámbito sociocultural. Las tres dimensiones que considera la ingeniería didáctica son abordadas en diferente grado. La dimensión epistemológica se integra sólo por un acercamiento histórico al concepto de vector. Respecto a la dimensión didáctica, se tomó en cuenta libros reportados por el profesor en la preparación de sus clases sobre el tema de nuestro interés. Mientras que la dimensión cognitiva pretende identificar las nociones de los estudiantes sobre la ecuación vectorial de la recta.

Para abordar la dimensión cognitiva se diseñó un cuestionario, por medio del cual se trató de identificar ideas asociadas a la recta y a los vectores. Y se realizaron entrevistas para profundizar en sus nociones sobre la ecuación vectorial de la recta e identificar modelos mentales que no favorecen el estudio de la ecuación vectorial de la recta. Como resultado se obtiene que el término recta es ampliamente conocido y lo asocian a su vida diaria, sin embargo se dan algunas interpretaciones que los llevan a pensar en la recta como algo finito. El término vector parece quedarse en el lenguaje escolar, ya que poco pueden reportar que no se apegue a las definiciones vistas en el aula. Los estudiantes han generado modelos mentales donde se pueden observar algunas de las características propuestas por Fischbein, como son coercitiva al considerar el vector dirección como parte de la recta o bien asumir que no pueden sumar un vector y un punto; y perseverancia cuando consideran al escalar que afecta al vector dirección como un número positivo.

A partir de las conclusiones que reporta la dimensión cognitiva existen elementos que parecen obstaculizar la comprensión de la ecuación vectorial de la recta. De tal modo que consideramos haber identificado algunos elementos que puedan orientar el diseño de situaciones didácticas para el estudio de la ecuación vectorial de la recta. Sin embargo, hay aspectos que pueden desarrollarse, como un estudio de la práctica escolar; o profundizar, como la dimensión epistemológica dirigida a la evolución de la ecuación vectorial de la recta.

ABSTRACT

This work proposed to identify conceptions in the students with respect to the vectorial equation of the straight line, with the intention to offer elements that orient the design of a didactic sequence for the study of this concept; which comprises of the subject of analytical geometry at superior level in the Faculty of Mathematics in U.A.D.Y.

Interest appeared in knowing how difficult it is for the students to work in a three-dimensional system and the handling of vectors. Of such form that begins east work analyzing the productions of the students in the study of the vectorial equation of the straight line and of where one concludes that between the students it exists a strong emphasis in reproducing the work of the professor and the inability to understand the elements that conform the vectorial equation of the straight line.

Before the necessity to make a study to offer information for an experimental design, it is decided on didactic engineering since allows to consider the actors of the didactic system of isolated form and simultaneously to establish links between them, to relate them in a sociocultural scope. The three dimensions that engineering considers didactic are boarded in different degree. The epistemologic dimension is formed for an historical approach to the vector concept. With respect to the didactic dimension, it was considered in books that were reported by the professor in the preparation from its classes on the subject from our interest. The cognitive dimension tries to identify a student's notions of the students about the vectorial equation of the straight line.

In order to approach the cognitive dimension a questionnaire was designed, by means of which one was to identify ideas associated to the straight line and the vectors. And interviews were made to deepen in their slight knowledge on the vectorial equation of the straight line and to identify mental models that do not favor the study of the vectorial equation of the straight line. As result is obtained that the straight term widely is known and they associate it to his daily life, nevertheless some interpretations occur that take them to think about the straight line like something finite. The term vector seems to remain in the scholastic language, since little they can report that it is not become attached to the definitions seen in the classroom. The students have generated models mental where some of the propose characteristics by Fischbein can be observed, as they are coercive when considering the vector direction like part of the straight line or to assume that they cannot add a vector and a point; and perseverance when they consider when climbing that it affects to the vector direction like a positive number.

From the conclusions that report the cognitive dimension exist elements that seem to prevent the understanding of the vectorial equation of the straight line. In such a way that we considered to have identified some elements that can orient the design of didactic situations for the study of the vectorial equation of the straight line. Nevertheless, there are aspects that can be developed, as a study of the scholastic practice; or to deepen, like the epistemologic dimension directed to the evolution of the vectorial equation of the straight line.

GLOSARIO

Cognitivo: Perteneciente o relativo al conocimiento.

Ecléctico: Toma de cualquier cosa lo que mejor le parece.

Ortogonalidad: sinónimo de perpendicular.

Algoritmo: Conjunto ordenado y finito de operaciones que permite hallar la solución de un problema.

Técnica: Habilidad para ejecutar cualquier cosa, o para conseguir algo.

Procedimiento: Método de ejecutar algunas cosas.

INTRODUCCIÓN

Tal como lo propone Fischbein, los modelos mentales tienen la capacidad de imponer limitaciones o contrastes y tienden a sobrevivir por largo tiempo aun después de haber adquirido el conocimiento formal. Por tal motivo, este trabajo pretende identificar los modelos intuitivos que no favorecen el estudio de la ecuación vectorial de la recta, en estudiantes de licenciatura del área de matemáticas de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán.

El análisis cognitivo planteado anteriormente, en conjunto con un análisis didáctico y un acercamiento histórico particularmente sobre vectores, concepto involucrado en el estudio de la ecuación vectorial, pretender dar cuenta de elementos a considerarse en el diseño de una secuencia didáctica para el estudio de la ecuación vectorial de la recta.

Para este estudio se recurrirá a la metodología de la Ingeniería Didáctica, teniendo un fuerte énfasis en el estudio de lo cognitivo, y se pretende dar cuenta de elementos a considerarse en el diseño de una secuencia didáctica para el estudio de la ecuación vectorial de la recta.

A continuación se presentan elementos que se consideran punto de partida para el desarrollo de este trabajo.

CAPÍTULO 1. LAS DIFICULTADES DE LOS ALUMNOS

Se piensa que el hombre prehistórico tuvo la necesidad de contar, medir y comparar; actividades donde figuran los conceptos básicos de la matemática como número, medida y orden. Con el desarrollo de las civilizaciones surgen los primeros sistemas de medida y se dice que las matemáticas nacen y tiene un gran desarrollo en la civilización griega, donde los problemas prácticos relacionados con las necesidades de cálculos y construcciones jugaron un papel importante. Así, las primeras teorías matemáticas que se abstrajeron de los problemas concretos o de un conjunto de problemas de un mismo tipo, crearon las condiciones necesarias y suficientes para el reconocimiento de la autonomía y especificidad de las matemáticas. Con el paso del tiempo, el desarrollo de las matemáticas puso más énfasis en aspectos más abstractos, deductivos y formales, debilitando la intuición y lo concreto; situación que se vio reflejada en la escuela con la incorporación de estos saberes altamente especializados y que traen consigo una serie de problemas, tanto de corte teórico como prácticos.

En el trabajo realizado por (Cantoral y Farfán, 2003), sobre el origen y evolución de la Matemática Educativa, se presenta el interés en la problemática de

> … *la evolución del estudio de los fenómenos didácticos que se suceden cuando los saberes matemáticos constituidos socialmente, en ámbitos no escolares, se introducen al sistema de enseñanza y ello les obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente tanto a su estructura como a su funcionalidad; de manera que afectan también las relaciones que se establecen entre estudiantes y profesores*...

Tal problemática puede analizarse desde la perspectiva de su evolución diferenciando en momentos denominados una didáctica sin alumnos, una didáctica sin escuela, una didáctica sin escenarios y una didáctica en escenarios socioculturales.

El primer momento, denominado didáctica sin alumnos, se consideraba que los profesionales de la matemática debían construir presentaciones de los contenidos matemáticos que se abordarían en la escuela y se producen libros de texto y materiales educativos, dejando de lado componentes como la naturaleza cognitiva o afectiva de los estudiantes y aquellos relativos a las cuestiones socioculturales del conocimiento. "*Se buscaba producir aquello que la escuela habría de consumir, sin estudiar a profundidad la cultura escolar*" (Cantoral y Farfán, 2003).

Un segundo momento, una didáctica sin escuela, hacia la década de los 80's se da a partir de estudios de corte cognitivo con los planteamientos del profesor Freudenthal sobre ¿cómo aprenden las personas? Y ¿cómo podemos aprender a observar procesos de aprendizaje? , mismos que resultan determinantes para que se modifique y amplíe la problemática de estudio de la matemática educativa, ya que se decide incluir al aprendizaje del alumno como factor central del diseño curricular así como para el desarrollo de la instrucción de la clase de matemáticas.

En el tercer momento, una didáctica sin escenarios, se reconoce que el desempeño de los alumnos no puede reducirse a la dimensión cognitiva, surge otra forma de abordar los problemas intentando analizar fenómenos didácticos tomando en cuenta la complejidad del sistema y tratar de esclarecer sus relaciones entre el saber, quien aprende y quien enseña.

Continuando con la evolución de la matemática educativa, se realizan estudios que incorporan aspectos sociales en las investigaciones didácticas, es lo que da lugar a *una didáctica en escenarios socioculturales*, en la cual se pretende desarrollar estudios que favorezcan la discusión, elaboración y experimentación de propuestas de enseñanza que permitan incorporar diversas prácticas. De donde, en forma más específica, se determina la socioepistemología como metodología de investigación y en la cual mediante un análisis epistemológico de conceptos matemáticos; que permita aportar de múltiples significados para reforzar el tratamiento didáctico, y del análisis del discurso escolar y de las prácticas de estudio en distintos contextos, se pretende rediseñar aspectos específicos de la matemática escolar.

Compartiendo la idea de que saber matemáticas no es solo saber definiciones y teoremas sino que es ocuparse de problemas en los que formule y pruebe proposiciones que le ayuden a construir modelos, conceptos y teorías que intercambiaría con otros, (Chevallard, 1998), entonces implicaría que el profesor proponga en la actividad matemática problemas en los que se formule y pruebe modelos, conceptos y teorías mediante la interacción con otros. En ese sentido, este trabajo aborda el concepto específico de la ecuación vectorial de la recta con miras a identificar elementos que orienten el estudio de dicho concepto y para lo cual nos apoyaremos para este estudio en la teoría de situaciones didácticas y partiendo de un contexto real de análisis como es el estudio de la ecuación vectorial de la recta por estudiantes de primer semestre de licenciaturas en el área de matemáticas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán.

Entonces partimos de las dificultades que enfrentan los estudiantes al incorporarse al nivel superior, lo cual implica un cambio de trabajo con las matemáticas, ya que se les pide pasar de algoritmos a demostraciones; siendo que éstas implican un razonamiento abstracto, mientras que los algoritmos demandan únicamente a la memoria.

En el bachillerato, los estudiantes tienen un curso obligatorio de Geometría analítica y al ingresar a las licenciaturas del área de matemáticas de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán, incluye un curso de Geometría analítica en el cual el alumno tiene que enfrentarse a redefinir lugares geométricos conocidos.

Las definiciones de lugares geométricos se apoyan ahora en los vectores, los cuales deben interpretarse como elementos dinámicos; y por si esto no fuera poco con la demanda de la visualización en R^3.

Considerando lo anterior, resulta importante identificar los errores que cometen los estudiantes al abordar ejercicios que involucran la ecuación vectorial de la recta en el espacio, y para ello se realizará un análisis de sus producciones y se reportarán las características particulares del grupo de observación.

1.1 El paso de la geometría analítica a la geometría vectorial; los cambios en la forma en cómo se estudia la ecuación de la recta.

El cambio del bachillerato a estudios superiores orientados a las licenciaturas del área de matemáticas, ofrecidas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán, demanda en los estudiantes un cambio de la algoritmia a las demostraciones. En particular, al estudiar la asignatura Geometría analítica, obligatoria del primer semestre de las licenciaturas en actuaría, enseñaza de las matemáticas y matemáticas, demanda una comprensión y manejo adecuado de los vectores y del concepto lugar geométrico, para lograr una adecuada construcción de la ecuación vectorial de la recta. De modo que se revisará brevemente algunas posturas respecto al desarrollo mental de los estudiantes y los cambios que se demanda en ellos al incorporarse a los estudios superiores. Posteriormente, se realiza un análisis del programa de la asignatura Geometría analítica, con miras a una reflexión sobre las propuestas de trabajo y sugerencias bibliográficas contra las realidades en el aula.

Los alumnos que inician estudios superiores tienen alrededor de 18 años y según la clasificación propuesta por Piaget (1979) sobre el desarrollo mental, se encuentran en la etapa de las "operaciones formales", pero sólo en algunos casos se alcanza este nivel de razonamiento antes de entrar a los estudios superiores, de ahí que Turégano (1997) indique que *la adquisición por parte del estudiante de algunos conceptos matemáticos es un proceso lento cuyo aprendizaje se debe extender a lo largo de la educación segundaria obligatoria y bachillerato para pasar a la formalización en la enseñanza universitaria*.

Debido a la supuesta madurez del alumno universitario, en el paso del bachillerato a la universidad se produce un cambio en lo que Gascón (1997) llama el contrato didáctico:

> *... se pasa de una matemática "mostrativa" a una matemática "demostrativa".*
> *... se pasa de una fuerte preponderancia de los "problemas por resolver" a una importante presencia de los "problemas por demostrar" en la universidad.*
> *... el estudiante pasa de ser un alumno con escasa autonomía, a ser un estudiante (co)responsable de su proceso de estudio.*

En la Geometría analítica, abordada en los cursos de nivel medio superior, los estudiantes trabajan con el concepto de lugar geométrico, sobre el cual se pretende establecer la relación entre la geometría y el álgebra. Bajo este aspecto, se supone que los estudiantes conocen dicho concepto y por lo tanto conciben que los puntos geométricos ubicados en el plano cumplen una condición establecida en una expresión algebraica y que pueden visualizarlo como un punto que se mueve de tal manera que siempre cumple, al menos, con una condición determinada. Esta noción se considera fundamental para la comprensión y construcción de la ecuación vectorial de la recta y por lo tanto nos interesa identificar como interpretan dicho concepto, entre otros que pudieran dificultar la comprensión de nuestro objeto de interés, o sea, la ecuación vectorial de la recta.

Al incorporarse los estudiantes al nivel superior y en particular aquellos matriculados en las licenciaturas de actuaría, enseñanza de las matemáticas y matemáticas de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán, en su primer curso semestral cuentan con la asignatura obligatoria denominada Geometría Analítica. Este curso, consiste en el uso de métodos algebraicos en el estudio de la geometría y viceversa. Se usan vectores, una útil herramienta algebraica con mucha interpretación geométrica. Se ven las distintas formas de la ecuación de una recta tanto en el plano como en el espacio, las ecuaciones de un plano, de la circunferencia, de las cónicas en general y de la esfera. Para la simplificación de las ecuaciones, se usan los métodos de cambios, entre los cuales se encuentran la rotación y traslación de ejes, las coordenadas polares, las cilíndricas y las esféricas. También se usan las ecuaciones paramétricas para expresar ciertos lugares geométricos. El curso está organizado en las siguientes unidades:

I. Vectores en el plano y en el espacio
II. La recta
III. El plano
IV. La circunferencia
V. La esfera
VI. Secciones cónicas
VII. Coordenadas polares
VIII. Ecuaciones paramétricas
IX. Transformaciones rígidas
X. La ecuación general de segundo grado
XI. Coordenadas cilíndricas y esféricas

Para efectos de este trabajo, centraré la atención a las dos primeras unidades, presentando con más detalle sus contenidos y objetivos particulares tomados del programa de estudio de la licenciatura en enseñanza de las matemáticas, de la Universidad Autónoma de Yucatán. En páginas siguientes encontrará segmentos reproducidos del programa. En el Cuadro 1, se presentan los datos de identificación de la asignatura así como los objetivos generales de la misma. El Cuadro 2 muestra el objetivo y contenido correspondiente a las unidades I y II mientras que el Cuadro 3 señala las actividades a realizarse en clase, sugeridas en el programa. En el Cuadro 4 refiere las actividades extraclase de la unidad II y el Cuadro 5 contiene la bibliografía sugerida en el programa de asignatura.

Resulta conveniente resaltar, que aunque el programa de la asignatura sugiera actividades en clase y fuera de ella, orientadas a un aprendizaje centrado en el estudiante; aún persiste una enseñanza centrada en el profesor, tal como muestra Porlán (1995, 1998) en un estudio sobre las concepciones científicas y didácticas de los profesores,

> ”... *las concepciones didácticas muestran una tendencia mayoritaria a concebir la enseñanza como una actividad centrada en la explicación del profesor, con los contenidos como eje director de la dinámica de la clase, y controlada y dirigida por el profesor... estos datos reafirman la evidencia cotidiana de que en la escuela predomina aún la enseñanza que solemos denominar tradicional* (Porlán, 1995, p.11)”.

En relación a los libros de texto que se proponen en la bibliografía, tanto en el Hasser como en el Wexler se aborda el tema de la recta con enfoque vectorial, pero el método empleado es de tipo instructivo donde se proporciona todos los elementos que se consideran necesarios con algunos diseños visuales o gráficos, se acompaña de algunos ejemplos y propone ejercicios. Por dar algunos detalles más, ejemplificaremos el caso del Wexler cuya publicación original corresponde a 1962, el autor plantea la importancia del estudio de los vectores que contribuirán al desarrollo de la geometría analítica, además considera la importancia de los conocimientos previos para el desarrollo de los temas que serán planteados, razón por lo cual algunos temas son repasados en este material. Adicionalmente, aporta resúmenes para algunos capítulos. Sin embargo, resulta conveniente hacer referencia a las necesidades actuales para el trabajo con los estudiantes y observar que la tendencia educativa de los 60's era de tipo instructiva y ahora en el 2006, se nos sugiere un aprendizaje centrado en el alumno en busca un aprendizaje significativo, y en particular en matemáticas podemos decir que una herramienta fundamental para la comprensión significativa es el uso de las diferentes representaciones y del establecimiento de relaciones entre ellas: simbólica, gráfica, numérica, geométrica y verbal.

La mayoría de los títulos propuestos no se apegan a la lógica del programa de estudio. Por mencionar un ejemplo, en algunos se aborda primero la recta en el espacio y posteriormente en el plano. Considerando que la propuesta es partir de los conocimientos de los estudiantes respecto al tema y en función de ello, el profesor desarrolla los contenidos por medio de actividades y exposiciones, dejando la bibliografía para estudio posterior e inclusive es el profesor quien organiza los ejercicios que los alumnos deben trabajar y no los dirige a páginas específicas de algún título.

Nérici (1985), en "Hacia una didáctica general dinámica", comenta que un libro, además de otras cualidades, debe:

1. *Ser actualizado y ecléctico, de modo que permita un panorama amplio, exento de sectarismo, y que suministre informaciones imparciales.*
2. *Estar fundado en un lenguaje científico accesible al nivel intelectual de los alumnos a los cuales está destinado.*
3. *Ser escrito para alumnos y no para profesores.*
4. *Ofrecer resúmenes, lecturas, problemas e indicaciones bibliográficas relativas a los asuntos estudiados.*

GEOMETRÍA ANALÍTICA

Semestre: Primero	*Horas: 72*	*Hrs/sem: 4.5*	*Créditos: 10*

OBJETIVOS DE LA ASIGNATURA:

1. *Manejar los conceptos fundamentales de la geometría analítica en el plano y en el espacio.*
2. *Deducir y manejar los resultados fundamentales de la geometría analítica en el plano y en el espacio, utilizando los vectores y sus propiedades.*
3. *Deducir y manejar la ecuación general de las curvas o superficies más importantes en matemáticas. Entre éstos último se abordan los planos, las superficies de las esferas, de los elipsoides, de los toros, de los paraboloides, los hiperboloides.*
4. *Deducir y manejar las propiedades de las curvas o superficies más utilizadas en matemáticas.*
5. *Graficar las curvas y superficies más utilizadas en matemáticas.*
6. *Resolver problemas matemáticos empleando los resultados fundamentales de la geometría analítica plana y del espacio y las propiedades de las curvas y superficies más utilizadas en matemáticas.*

Cuadro 1

UNIDAD I: VECTORES EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO

***Objetivo**: Al concluir la unidad, el alumno será capaz de realizar las operaciones usuales de vectores y de interpretar gráficamente los resultados.*

Operaciones con vectores

Paralelismo y ortogonalidad de vectores

Dependencia lineal

Producto escalar y vectorial

UNIDAD II: LA RECTA

***Objetivo**: Al concluir la unidad, el alumno será capaz de resolver problemas usando las formas más comunes de la ecuación de la recta tanto en el plano como en el espacio.*

La recta en el plano

Pendiente de una recta

Formas de la ecuación de una recta

Posiciones relativas de dos rectas

La recta en el espacio

Cosenos directores y números directores de una recta en el espacio

Distancia de un punto a una recta en R^3

Ángulo formado por dos rectas

Familias de rectas

Cuadro 2

Actividades en clase:

1. *Mediante interrogatorio los alumnos repasarán sus conceptos de recta*
2. *En grupos pequeños deducirán la ecuación vectorial de una recta a partir de datos dados.*
3. *Ante todo el grupo se discutirán los resultados y obtendrán los modelos para la recta en el plano y en el espacio.*
4. *Mediante lluvia de ideas propondrán situaciones que involucren distancia de un punto a una recta.*
5. *En grupos pequeños deducirán, usando vectores y sus propiedades, esas distancias, a partir de datos dados.*
6. *Ante todo el grupo, expondrán sus resultados.*
7. *En forma individual deducirán el ángulo entre dos rectas, usando vectores.*
8. *Aleatoriamente se seleccionará a dos alumnos para exponer sus resultados.*
9. *En forma individual resolverán ejercicios relacionados con los conceptos de la unidad.*

Cuadro 3

Actividades extraclase. El alumno:

1. *Redactará las justificaciones de los procedimientos utilizados en clase para deducir los conceptos relacionados con rectas en el plano y en el espacio.*
2. *Consultará textos para comparar sus resultados.*
3. *Resolverá ejercicios de textos, relacionados con los temas.*
4. *Consultará los temas propuestos para la siguiente clase.*

Cuadro 4

BIBLIOGRAFÍA:

1. *Hasser, Norman B. Análisis Matemático, Vols. I y II. México: Trillas, 1970.*
2. *Wexler, Charles. Analytic Geometry: A vector approach. USA: Addison-Wesley, 1962.*
3. *Lehmann, Charles. Geometría Analítica. México, UTHEA, 1978.*
4. *Murdoch. D.C. Geometría analítica con vectores y matrices.*
5. *Palmer, Agnem Ralph. Geomettría analítica y cálculo con vectores. USA: McGraw-Hill, 1962.*

Sitios de internet:

a. *Geometry center: http://www.geom.unam.edu*
b. *http://forum.swarthmore.edu*

Software:

1. *Geometer´s Sketchpad, Key currículo press, 1995.*

Cuadro 5

5. *Contener elementos de trabajo que conduzcan a la revisión y fijación del aprendizaje.*
6. *Contener motivaciones e indicaciones para la ampliación del aprendizaje.*
7. *Ser un libro de trabajo, capaz de ofrecer estímulos para un quehacer libre y creador, sobre la base de preguntas, problemas y observaciones.*

De modo que faltaría trabajar en la producción de material didáctico específico para este curso, material escrito en un lenguaje accesible a los estudiantes, que contenga resúmenes, lecturas problemas e indicaciones bibliográficas, así como actividades de revisión y fijación. Pero sobre todo, que considere abordar los conceptos matemáticos de interés a partir del planteamiento de actividades, en las que se pongan en juego los conocimientos previos con miras en la construcción de nuevos conceptos. O bien, actividades que requieran la solución de problemas donde los estudiantes utilizarán sus matemáticas llegando a situaciones en las cuales requieren nuevas herramientas para dar solución al problema planteado, y aquí radicaría la importancia y valor, para los estudiantes, de los nuevos conceptos que hasta ese momento introducirá el profesor. Todo lo anterior, sería en lugar de ofrecer las definiciones, ejemplos, ejercicios y problemas.

Por otro lado, aunque este trabajo se centra en un tema correspondiente a las primeras unidades, de las once que se proponen en el programa; el profesor debe realizar un análisis para determinar los temas de mayor importancia considerando el plan de estudios, ya que los tiempos resultan insuficiente para poder abordar todo el contenido propuesto y en el mejor de los casos en los que se logra cubrir todo el programa en clase se hace muy superficialmente.

En conclusión, se reconoce las dificultades a las que se enfrenta el estudiante que se incorpora a los estudios superiores orientados a las matemáticas, en el sentido de pasar de los algoritmos del bachillerato a las demostraciones en la universidad. En el estudio de la ecuación vectorial de la recta, la comprensión y manejo de los vectores resultan de suma importancia y aunque el programa de Geometría analítica sugiera un aprendizaje centrado en el estudiante, se sigue favoreciendo una enseñanza centrada en el profesor, quien tiene que recurrir a las clases preferentemente expositivas debido a la falta de libros de texto acordes con el programa. Está por demás decir que los tiempos de clase resultan insuficientes para poder abordar todo el contenido propuesto y en el mejor de los casos se presentan de forma muy rápida sin dar tiempo suficiente para su aprendizaje. Todo lo anterior sugiere un análisis del programa de la asignatura, con miras a proponer un curso que aborde los contenidos en tiempo y forma, lo cual deberá llevar a una reestructuración del plan de estudios en general.

1.2 Análisis a las producciones de estudiantes en el estudio de la ecuación vectorial de la recta

Los errores de los alumnos son importantes muestras de los procesos mentales que ellos desarrollan, y por tal motivo es conveniente examinarlos con detenimiento. Concordando con Brousseau (1976, 1983), los errores no son erráticos e imprevisibles, están constituidos de obstáculos a la apropiación por el alumno de ciertas nociones. La introducción de la noción de obstáculo epistemológico en didáctica se dio en 1976 como un medio para cambiar el status del error, así fue posible mostrar que... *el error no es sólo el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre o del azar, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, que incluso habiendo sido exitoso se presenta como falso o inadaptado...*

Los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico pueden ser debido a varias causas y se distinguen tres tipos fundamentales de origen: uno de origen ontológico ligado a las capacidades cognitivas de los estudiantes engarzados en un proceso de enseñanza; otro de origen didáctico como consecuencia del sistema de enseñanza y otro de origen propiamente epistemológico ligados a la resistencia de un saber mal adaptado, en el sentido de Bachelard (1972).

Socas y Palarea (1997), afirman que el aprendizaje del álgebra genera muchas dificultades a los alumnos y alumnas *y estas dificultades son de naturaleza diferente, y tienen que ver con la complejidad de los objetos del álgebra. Los errores aparecen en el trabajo de los alumnos y alumnas sobre todo, cuando se enfrentan a conocimientos novedosos que los obliga a hacer una revisión o reestructuración de los que ya saben. Los errores son intentos razonables pero no exitosos de apartar un conocimiento adquirido a una nueva situación.*

Para este trabajo se realizó el análisis de las producciones de los estudiantes, al responder un reactivo específico de una prueba escrita, la cual corresponde al primer examen parcial e involucra conceptos de vectores, la recta en el plano y el espacio así como el estudio de plano. Encontrará una reproducción de la prueba en el Cuadro 6. Cabe señalar que al momento de éste análisis, las pruebas habían sido calificadas y por lo tanto contenían anotaciones del profesor de grupo, por esta razón para efectos de éste trabajo se consideró transcribir las producciones de los alumnos para omitir las anotaciones del profesor.

La prueba se aplicó a un grupo de 33 estudiantes de primer semestre de licenciatura en enseñanza de las matemáticas. La prueba consta de 7 reactivos, mismos que se presentan más adelante. Adicionalmente, se muestra una tabla donde se plantea el nivel de conocimiento que pretende cada reactivo, identificando entre ellos desde el simple aprendizaje memorístico, la comprensión, retención de la información y el uso activo del conocimiento. El análisis se centró en el reactivo 5, el cual involucra el concepto matemático de interés, o sea, la ecuación vectorial de la recta.

PRUEBA ESCRITA

1. Sean **a**, **b** $\in$ **V**$_2$ y r, s $\in$ **R**, demostrar que:
   a) (r + s)**a** = r**a** + s**a**
   b) Si **a** y **b** son paralelos, entonces $\mathbf{a}^{\perp}\cdot\mathbf{b} = 0$

2. Sean los vectores **a** = (2, 6, 3), **b** = (1, -14, 1), **c** = (3, -2, 1) y **d** = (1, -1, -1), expresar el vector **b** como una combinación lineal de **a**, **c** y **d**.

3. Usando vectores y sus propiedades, demostrar que las medianas correspondientes a los lados iguales de un triángulo isósceles son iguales.

4. Los vértices de un triángulo son los puntos A(5, 2, 1), B(-2, 4, -3) y C(-5, 1, 12). Hallar:
   a) Un punto P sobre BC que se encuentre dos veces más lejos de B que de C.
   b) Los cosenos directores de la recta que pasa por A y P, dirigida del primer al segundo punto, respectivamente.

5. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto (6, -1, 3) y es paralela a cada uno de los planos $2x + 7y + 3z - 16 = 0$ y $x - 2y + 8z + 13 = 0$.

6. La base de un tetraedro es el triángulo cuyos vértices son P(1,-2,1), Q(-4,2,-1) y R(-5,5, 3). Hallar:
   a) La medida del ángulo RPQ
   b) Un vector perpendicular al plano del triángulo de la base
   c) Si el cuarto vértice del tetraedro es el punto (4, 2, -3), hallar la longitud de la altura trazada desde este vértice a la base.

7. Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $8x + y + 20z = 5$, $2x - 3y + 6z = -5$ y es perpendicular al plano $5x - 4y + z = 10$.

Cuadro 6

En la siguiente Tabla, se describe el nivel de conocimiento que se pone a prueba en cada reactivo.

Reactivo	Nivel	Comentario
1 a y b	Memorístico	Como parte del curso se abordan algunas demostraciones al introducir las propiedades de los vectores y se encomiendan las otras. De modo que el estudiante puede realizar investigación bibliográfica y dar con los resultados.
2	Memorístico	Al abordar el concepto de combinación lineal, el profesor ejemplifica el concepto con operaciones con vectores para determinar su dependencia o independencia.
3	Comprensión-uso activo	El alumno puede conocer las propiedades de los vectores pero en este reactivo se pone en juego la comprensión cuando tiene que identificar lo que debe demostrar y utilizar los conocimientos para poder realizarlo.
4 a y b	Retención de la información	Durante las clases se abordaron ejercicios de este tipo, por lo que son considerados ejercicios típicos, y únicamente tendría que recuperar esta información para resolver el reactivo.
5	Comprensión-uso activo	El alumno debe identificar los elementos que requiere para poder determinar las ecuaciones de una recta y considerando que se le proporcionaba un punto, debe comprender que a partir de las ecuaciones dadas de dos planos debía determinar el vector dirección.
6 a, b y c	Comprensión-uso activo	Indiscutiblemente, en este reactivo los alumnos deben mostrar comprensión de los elementos relacionados con el plano lo que le permitirá la aplicarlos para poder resolver lo que se solicita. El reactivo implica (a) saber calcular el ángulo entre dos vectores, los cuales tendrá que determinar el estudiante, o sea, manejar el producto punto, (b) reconocer que con dos vectores que obtenga a partir de los puntos dados puede efectuar el producto cruz para obtener un vector normal al plano, y (c) saber calcular la distancia de un punto a un plano.
7	Comprensión-uso activo	Se requería que se identifique la recta generada por la intersección de dos de los planos dados, de donde se obtendría su vector dirección, mismo que debe ser perpendicular al tercer plano dado.

Tabla 1

Aunque el reactivo 5, resulta ser de principal interés para efectos de este trabajo, es conveniente mencionar que los incisos b y c del reactivo 6 resultaron ser los menos abordados. A ellos le sigue el reactivo 5, en el cual algunos alumnos lo dejaron inconcluso y otros no lo abordaron. El siguiente reactivo con mayor dificultad resultó ser el 3, aunque si fue abordado por todos los estudiantes. Y a continuación, en orden de dificultad, resulta el 6 inciso a. Los reactivos con mejores resultados son el 2, 4 inciso a y el 7. Esto último parece concordar con el llamado proceso de enseñanza tradicional donde se hace énfasis en los contenidos propiciando un aprendizaje memorístico.

Al plantear el reactivo 5, donde se piden las ecuaciones de la recta que pasa por el punto (6,-1,3) y que es paralela a cada uno de los planos $2x + 7y + 3z - 16=0$ y $x - 2y + 8z + 13=0$, se pretendía que el estudiante:

- Recordara qué elementos requiere para poder determinar la ecuación de una recta: un punto por donde pasa la recta y un vector que le daría dirección. Llamemos P_0 al punto y **a** al vector dirección.

- Considerando que el punto esta dado P_0 (6, -1, 3), faltaría el vector dirección, mismo que debe relacionar con los dos planos dados.

- Dadas las ecuaciones de los planos, se puede obtener fácilmente los vectores normales por medio de los coeficientes de las variables x, y, z.

  Sea π_1: $2x + 7y + 3z - 16 = 0$ un vector normal es $n_1 = (2, 7, 3)$

  π_2 : $x - 2y + 8z + 13 = 0$ un vector normal es $n_2 = (1, -2, 8)$

- Como la recta pedida debe ser paralela a los planos, entonces los vectores normales de los planos deberán ser también perpendiculares a la recta y por consiguiente al vector dirección de ésta.

- Al considerar al vector dirección como $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, si efectuamos el producto punto con cada uno de los vectores normales, el resultado será cero.

  $\mathbf{a} \cdot n_1 = 0$ $\qquad$ $\mathbf{a} \cdot n_2 = 0$

  $2a_1 + 7a_2 + 3a_3 = 0$ $\qquad$ $a_1 - 2a_2 + 8a_3 = 0$

  Conformando un sistema de ecuaciones con los resultados obtenidos, se puede llegar a un vector dirección, digamos $\mathbf{a} = (-62, 13, 11)$.

- Teniendo el vector dirección, se puede dar la ecuación vectorial de la recta, las ecuaciones paramétricas y las simétricas:

Ecuación vectorial	P = { $P_0 + \lambda$ **a** | $\lambda \in \Re$}
	P = { (6, -1, 3) + λ(-62, 13, 11) | $\lambda \in \Re$}
Ecuaciones paramétricas	x = 6 - 62λ
	y = -1 + 13λ
	z = 3 + 11λ
Ecuaciones simétricas	$\frac{x-6}{-62} = \frac{y+1}{13} = \frac{z-3}{11}$

Considerando la imposibilidad de dar una clasificación de los distintos tipos de errores cometidos al tratar de obtener la ecuación vectorial de una recta, simplemente se reportará una caracterización de los errores observados en las producciones de los estudiantes al responder el reactivo 5.

> 5. Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto (6, -1, 3) y es paralela a cada uno de los planos *2x + 7y + 3z - 16 = 0* y *x - 2y + 8z + 13 = 0*.

Para efectos de esta caracterización, se omitirán casos que se consideran como un momento de distracción, como puede ser al escribir un número en lugar de otro, tal como puede observarse a continuación:

CASO OMITIDO. El estudiante rescata los vectores normales de los planos dados a partir de sus ecuaciones pero comete el error de escribir un número por otro.

> π_1: 2x + 7y + 3z – 16 = 0 y π_2: x – 2y + 8z + 13 = 0
>
> **n**π_1 = (2, 7, 3) y **n**π_2 = (1, -1, 8)

observar que escribió -1, cuando debía ser -2

Particularmente, este caso puede ser considerado como una simple distracción razón por la cual no se tomará en cuenta para efectos de la propuesta de secuencia didáctica, sin embargo será de suma importancia los que presentan a continuación:

1. **Error tipo I**. Errores asociados con el uso de una fórmula. En estos casos, los estudiantes emplean la ecuación vectorial del plano en lugar de la ecuación vectorial de la recta.

2. **Error tipo II.** Dificultades asociadas con la ausencia de significado. Se refiere a los casos en los que los estudiantes no pueden justificar sus procedimientos o bien le es indistinto como emplear o interpretar la notación matemática

A continuación, se presentarán casos específicos tomados de las producciones de diferentes estudiantes al responder al reactivo que ejemplifican las caracterizaciones propuestas.

<u>**ERROR TIPO I. ERROR ASOCIADO CON EL USO DE UNA FÓRMULA**</u>

EJEMPLO 1. En este caso el estudiante identifica el punto dado y los vectores normales de los planos, pero parece equivocarse al plantear la ecuación del plano en vez de la ecuación vectorial de la recta y trata de ajustar los datos identificados para poder llegar a la ecuación que propone.

$P_1 = (6, -1, 3)$

Sea $\mathbf{a} = (2, 7, 3)$
$\mathbf{b} = (1, -2\ 8)$

$A = \mathbf{a}\ \mathbf{b} = (1, -2, 8) - (2, 7, 3) = (-1, -9, 5)$ — 1

$[P - P_1] \cdot A = 0$ — 2

$[(x, y, z) - (6, -1, 3)] \cdot (-1, -9, 5) = 0 \rightarrow [(x - 6), (y + 1), (z - 3)] \cdot (-1, -9, 5) = 0$

$-1\,(x - 6) + (-9)(y + 1) + 5(z-3) = 0 \quad -x + 6 - 9y + 5z - 15 = 0$

$-x - 9y + 5z - 18 = 0 \quad x + 9y - 5z + 18 = 0$

1. Parece que el estudiante identifica que falta el vector A, y determina que lo puede obtener a partir de la diferencia de los vectores normales.

2. Emplea le ecuación vectorial del plano, reconociendo que en aquel momento consideraba que era lo adecuado, que era la ecuación de la recta. Sin embargo cuando se le cuestiona sobre la expresión que representa la ecuación vectorial de la recta, no la recuerda.

> En lugar de la ecuación vectorial de la recta se utiliza la del plano y el estudiante manipula la información disponible para completar los datos que deben sustituirse en la fórmula.

EJEMPLO 2. En la entrevista con el estudiante, se identifica que primero recurrió al siguiente procedimiento:

$$A \cdot P = b \qquad 1$$

$$(x, y, z)\,(6, -1, 3) = 2x + 7y + 3z - 16 = 0 \qquad 2$$

$$-(2x + 7y + 3z - 16) + 6x - y + 3z = 0$$
$$-2x + 6x - 7y - y + 3z - 3z + 16 = 0$$
$$\underline{4x - 8y + 16 = 0} \qquad 3$$

$$(x, y, z)\,(6, -1, 3) = x - 2y + 8z + 13$$
$$-(x - 2y + 8z + 13) + (6x - y + 3z) = 0$$
$$-x + 6x + 2y - y - 8z + 3z - 13 = 0$$
$$\underline{5x + y - 5z - 13 = 0}$$

1. Se recurre a la ecuación vectorial del plano, donde supone desconocer el vector A y que espera encontrar. Además, desconoce el significado de P en la ecuación del plano, al suponer que es el punto dado en el reactivo y sabía que debía sustituir este valor en la ecuación.

2. El producto propuesto lo iguala a cero, esto muestra que trata de reproducir un procedimiento que no recuerda.

3. Según el estudiante, los resultados obtenidos son las ecuaciones de la recta.

Después de haber obtenido las ecuaciones anteriores, el estudiante obtiene los vectores normales a cada plano y logra identificar que éstos con perpendiculares a la recta pedida, pero reconoce que no recuerda que tenía que hacer después.

π_1 $2x + 7y + 3z - 16 = 0$ (2, 7, 3)
π_2 $x - 2y + 8z + 13 = 0$ (1, -2, 8)

Son $\perp$ a L_1
$\pi_1 \cdot$
(2, 7, 3) (A, B, C)

El estudiante confundió la ecuación del plano con la de la recta y que trata de recordar un procedimiento visto en clase. Recuerda puntos clave de dicho procedimiento como son: la búsqueda de un vector a, realizar el producto punto, igualar a cero dicho producto y el sustituir el punto dado en la ecuación.

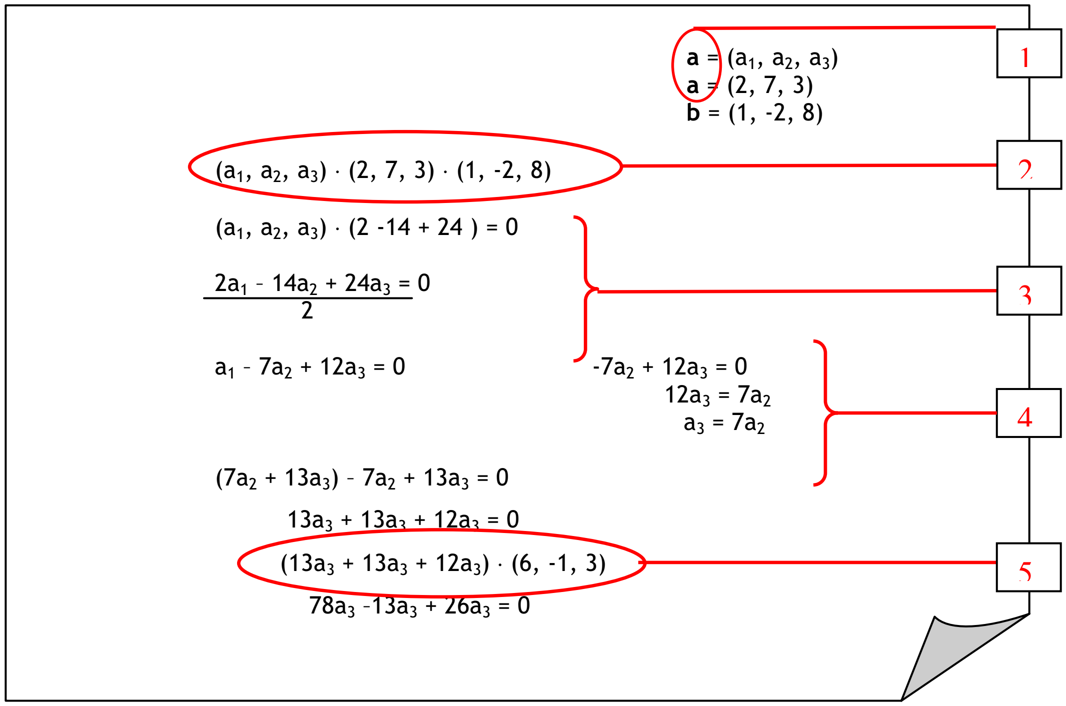
En ambos ejemplos presentados, se recurre a la ecuación vectorial de plano en lugar de la ecuación vectorial de la recta. Parece evidenciarse que los estudiantes están reproduciendo un procedimiento visto en clase.

El estudiante no puede hacer la diferencia entre el vector de dirección de la recta y el vector normal, y en relación al punto en la recta se trata de un dato conocido mientras que en el plano es una variable; y por último el producto punto en el caso del plano es una expresión que permite obtener los distintos puntos que conforman el plano mientras que en el caso específico del reactivo 5, es un procedimiento para poder determinar el vector dirección.

ERROR TIPO II. DIFICULTADES ASOCIADAS CON LA AUSENCIA DE SIGNIFICADO

Dentro de esta caracterización se presentan distintos ejemplos, en los cuales se manifiesta una ausencia de significado para distintos conceptos al tratar de resolver el reactivo 5.

EJEMPLO 1. Considerando que como parte de la clase se abordaron ejercicios de este tipo, observemos las dificultades que presenta el estudiante en varios sentidos; para esto se trascribe la respuesta al reactivo 5 sobre el cual se hacen algunas referencias que posteriormente se comentan.



1. Existe una falta de significado respecto a la notación matemática, ya que para el estudiante le es indistinto cómo nombrar a los vectores, puesto que denomina al vector normal de uno de los planos de la misma forma que al vector que está buscando; situación que se ve propiciada por el mismo profesor.

   Cuando se le cuestiona al estudiante si podrían llamarse igual dos vectores, acepta que no pero justifica haberlo hecho de esa forma por costumbre:

   *E60: En las hojas donde está la definición siempre manejábamos vector "**a**" y poníamos a_1, a_2, a_3 y por costumbre lo ponemos igual.*

2. Parece que el estudiante no comprende la intención de operar el vector normal de cada plano dado con el vector dirección que desea determinarse. Y cuando se le cuestiona porqué buscar el vector **a**, no puede justificar que sentido tiene, argumentando que no recuerda, entonces esto muestra que el estudiante encuentra el significado de dicho vector en la ecuación de la recta.

   E29: El que me dan... no agarré un vector "x" a_1, a_2, a_3

   P30: ¿Quién sería ese vector?

   E31: No me acuerdo

3. Con respecto al producto punto, cuyo resultado es un escalar, parece que se pierde este significado. Primero al considerar que puede efectuarse el producto punto entre tres vectores. Segundo al efectuar el producto entre dos vectores conocidos y el resultado lo expresa como una suma. Este resultado, posteriormente se considera como las componentes de un vector, que utiliza para efectuar el producto punto con el tercer vector.

4. A partir del resultado de la operación del producto punto, el estudiante pretendía obtener las componentes del vector buscado en términos de una sola componente, recuerda que se eliminaba una componente, pero no recuerda que era al trabajar en un sistema de ecuaciones

   E65: Intentaba igualarlos todos a un mismo término por ejemplo en a_1, a_2 o a_3 pero ya no alcanzó el tiempo

5. Según el procedimiento que recordaba, debía sustituir el punto conocido para tener la ecuación de la recta

   E67: Recordaba que el ejercicio era sí, dejarlo en una sola variable y después ya tenías la ecuación haciendo la sustitución

En conclusión, en el ejemplo presentado se observa que el estudiante únicamente pretendía reproducir un procedimiento visto en clase, sin poder justificar el porqué de cada expresión planteada y el problema no llega a concluirse debido a omisiones en el procedimiento.
En la entrevista se identifican conceptos que no están lo suficientemente bien establecidos como es el caso de producto punto y vector normal.

EJEMPLO 2. Otro ejemplo de ausencia de significado es el que se refiere a confundir una expresión algebraica asociada a un sistema de ecuaciones con la ecuación simétrica de la recta. En este ejemplo, además puede observarse que se comete una omisión de signo en dos ocasiones, lo cual no será tomado en cuenta, por considerarse una distracción.

(6, -1, 3) $\quad$ $2x + 7y + 3z - 16 = 0$ $\quad$ $x - 2y + 8z + 13 = 0$ $\quad$ 1

$(2, 7, 3)$ (x, y, z) $\quad$ $(1, -2, 8)$ (x, y, z)

$2x + 7y + 3z = 0$ $\quad$ $x - 2y + 8z = 0$

$$\begin{array}{r|l} -8 & 2x + 7y + 3z = 0 \\ 3 & x - 2y + 8z = 0 \\ \hline & -16x - 56y = 0 \\ & 3x - 6y = 0 \\ \hline & 13x - 62y = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 2x + 7y + 3z = 0 \\ 7 & x - 2y + 8z = 0 \\ \hline & 4x + 6z = 0 \\ & 7x + 56z = 0 \\ \hline & 11x = -62z \end{array}$$

Se considera una distracción

$$x = \frac{62y}{13} \qquad x = \frac{-62z}{11}$$

$$x = \frac{62y}{13} = \frac{-62z}{11}$$

2

3

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y}{\frac{13}{62}} = \frac{-z}{\frac{11}{62}} \qquad \left[1, \frac{13}{62}, \frac{11}{62}\right]$$

a = [62, 13, 11] mult. por 62

$$P = P_1 + \lambda a$$

$$(x, y, z) = (6, -1, 3) + \lambda\,(62, 13, 11) \qquad \text{ec. Vectorial}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 6 + 62\lambda \\ y = -1 + 13\lambda \\ z = 3 + 11\lambda \end{array}\right\} \qquad \text{ec. paramétrica}$$

1. El vector desconocido lo llama (x, y, z), esta situación lo conduce a un problema de interpretación al relacionarlo con las ecuaciones simétricas que involucran estas variables

   E5: Como no se conoce es x, y, z

2. Al resolver el sistema de ecuaciones, obtiene valores para “x” en función de “y” y de “z”, lo cual le permite establecer una igualdad.

3. En particular el estudiante parece identificar que a partir de las ecuaciones simétricas de la recta con forma

$$\frac{x - x_1}{a_1} = \frac{y - y_1}{a_2} = \frac{z - z_1}{a_3}$$

puede obtener de los denominadores un vector dirección de la recta que sería (a_1, a_2, a_3) y como parte del numerador estará un punto de la recta (x_1, y_1, z_1). Reconoce que las variables x, y, z deben tener la unidad como coeficiente de ahí que transforme cada fracción,

$$x = \frac{62y}{13} = \frac{-62z}{11} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x-0}{1} = \frac{y}{\frac{13}{62}} = \frac{-z}{\frac{11}{62}}$$

también recuerda que aparecían otros números (las componentes de un punto de la recta) al incluir - 0 a la primera fracción.

E16: Y por [...] aquí como no tiene otro coeficiente, me acuerdo que se le pone un denominador y estos se bajaban, 62 y 13 y por la ley del sándwich se suben y como quedó abajo sería el punto 1, 13/62, 11/62

P19: ¿Por qué le incluiste este –0?
E20: […] (no responde)
P21: En la línea de arriba no lo tiene y tampoco tiene el denominador 1 y tú se lo incluiste para que todos tengan denominador, pero a la primera parte de la igualdad le incluiste –0, ¿por qué?
E22: Porque no tiene, los otros tienen otro coeficiente y como esta, solo me acuerdo que se le agregaba un número

En este caso, el obtener las soluciones del sistema en términos de x, y, z parece haber confundido al estudiante llevándolo a relacionar esta expresión con la ecuación simétrica. Cabe resaltar que el estudiante obtiene la ecuación vectorial de la recta, pero cuando se le piden justificaciones de su proceder, tiende a fundamentar en que recordaba que eso debía hacerse, lo que nos hace pensar que está tratando de reproducir el procedimiento, sin lograr comprenderlo en su totalidad.

EJEMPLO 3. En esta ocasión el estudiante determina correctamente el vector dirección de la recta a partir del vector normal de cada plano pero al expresar la ecuación vectorial de la recta intercambia el vector dirección como punto y el punto como vector. Parece no identificar cada concepto o no percibe el hecho de que al cambiar estos datos el resultado será una recta distinta. Escribe como ecuación vectorial de la recta lo siguiente:

$P_1 = (6, -1, 3)$ $\pi = [2, 7, 3]$ $\pi_2 = [1, -2, 8]$ 1

$a \cdot \pi_1 = 2a_1 + 7a_2 + 3a_3$ 2
$a\ \pi_2 = a_1 - 2a_2 + 8a_3$

$$\begin{array}{r|l} & 2a_1 + 7a_2 + 3a_3 = 0 \\ -2 & a_1 - 2a_2 + 8a_3 = 0 \\ \hline & 2a_1 + 7a_2 + 3a_3 = 0 \\ & -2a_1 + 4a_2 - 16a_3 = 0 \\ \hline & 11a_2 - 13a_3 = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 2a_1 + 7a_2 + 3a_3 = 0 \\ 7 & a_1 - 2a_2 + 8a_3 = 0 \\ \hline & 4a_1 + 14a_2 + 6a_3 = 0 \\ & 7a_1 - 14a_2 + 62a_3 = 0 \\ \hline & 11a_1 + 30a_3 = 0 \end{array}$$

$$a_2 = \frac{13a_3}{11} \qquad a_1 = \frac{-62a_3}{11}$$

$$\left(\frac{-62a_3}{11}, \frac{13a_3}{11}, a_3\right)$$

$P = (-62, 13, 11) + \lambda\ (6, -1, 3)$ 3

$x = -62 + 6\lambda$
$y = 13 - \lambda$
$z = 11 + 3\lambda$

$$\frac{x+62}{6} = \frac{y-13}{-1} = \frac{z-11}{3}$$

1. Al tomar los números directores de los vectores normales de los planos, parece haber una confusión, recuerda que son los números directores pero luego dice que son los otros puntos que requiere para dar las ecuaciones de la recta.

   E16: Son los números directores [...] son otros puntos

2. Al preguntarle ¿por qué el producto punto entre los vectores normales y el vector **a** debe ser cero?, responde:

   E54: No me acuerdo por que se iguala a cero

3. Al presentar la ecuación vectorial escribe el vector de dirección encontrado como si fuera el punto y el punto se ve multiplicado por lambda, al cuestionarle sobre esto responde:

E34: Lo confundí y se me acababa el tiempo, sí sabía como iban los puntos pero se me revolvió

Al mirar la solución de este reactivo, en un primer momento puede parecer que se trató de una distracción al momento de dar la ecuación vectorial de la recta, pero en la entrevista se identifican algunos conflictos en el estudiante como los que se muestran a continuación:

- El estudiante parece ignorar el enfoque vectorial del tema y cuando se le pregunta sobre lo que se requiere para dar las ecuaciones de la recta responde de acuerdo a lo que se aprendió en el bachillerato

P5: ¿Qué requerimos para obtener las ecuaciones de la recta?
E6: Un punto
P7: ¿Es suficiente?
E8: Un punto y la pendiente, o dos puntos

- Considera el vector "**a**" como un punto (recordemos que decía que se requieren dos puntos para poder determinar la ecuación de la recta)

E24: [...] Para que [...] "a" va a ser [...] ya que multiplicamos va a quedar a_1, a_2, a_3 [...] lo que va a ser el otro punto

- Cuando se le cuestiona sobre la expresión de la ecuación vectorial plasmada en su trabajo, lo confunde con la ecuación del plano, además dice que λ es un vector

P29: ¿Qué representa esto? (indicando $P = p1 + \lambda a$)
E30: Representa la fórmula del plano
P31: ¿Qué significa lambda?
E32: Lambda viene siendo una [...] el vector [...] no, no se no me acuerdo

Se trata de una reproducción del trabajo del profesor, y el estudiante no posee bases suficientes para poder justificar el procedimiento, más aún existen algunas imprecisiones en lo referente a la ecuación vectorial de la recta, como puede observarse cuando considera que lambda es un vector.

EJEMPLO 4. Otra situación que se observó, es que los estudiantes parecen rescatar de la memoria los últimos temas vistos en clase, que además puede ser considerado como una falta de

significado debido a que no logra diferenciar cuando una expresión representa un plano o una recta lo cual se hace evidente cuando un estudiante responde al reactivo 5, de la manera siguiente:

$2x + 7y + 3z - 16 + k (x - 2y + 8z + 13) = 0$ 1

$(2 + k)\, x + (7 - 2k)\, y + (3 + 8k)\, z - 16 + 13k = 0 \quad (*)$

Como pasa por el punto (6, -1, 3)

$(2 + k)(6) + (7 - 2k)(-1) + (3 + 8k)(3) = 0$

$12 + 6k - 7 + 2k + 9 + 24k = 0$

$32\,k = -14$

$k = \frac{-14}{32} \rightarrow k = -7/16$

Sust. El valor de k en (*)

$(2 - \frac{7}{16})\, x + (7 - 2(-\frac{7}{16}))\, y + (3 + 8(-\frac{7}{16}))\, z - 16 + 13(-\frac{7}{16}) = 0$

$\frac{25}{16}x + \frac{63}{8}y - \frac{1}{2}z - \frac{3417}{16} = 0$ 2

1. Dado que el reactivo incluía una observación de la maestra-titular, al calificar la prueba, que dice: “esta es la ecuación de la familia de planos no de una recta”, se le pregunta al estudiante porqué utilizó esta expresión y responde:

   E12: Fue confusión, realmente lo que quise hacer si fue la de la ecuación de la familia de planos no de la recta, pero creo que habían varios ejercicios parecidos y por eso fue que yo lo resolví de esa manera.

   Entonces al aceptar que está representando una familia de planos, se le pregunta que significado tiene el parámetro k, a lo que responde:

   P15: ¿En la familia de planos que significa el parámetro k?
   E16: No, recuerdo

2. Al cuestionar al estudiante sobre el resultado que da al reactivo, con la intención de saber si reconoce haber hallado un plano y no una recta, responde:
   P13: Según el procedimiento y la respuesta que das ¿qué fue lo que encontraste?
   E14: ¿Según lo que yo hice? Se halló la familia de planos y nos pedían de una recta.

Adicionalmente, se debe tomar en cuenta que en este caso el estudiante no asistió a las sesiones de clase donde se abordaron los temas la recta y el plano, de modo que estudió de manera independiente con base al Lheman, recomendado en la bibliografía, y notas de clase de los compañeros.

La solución planteada en este caso, es una muestra más sobre la tendencia a reproducir procedimientos propuestos por el maestro. En ocasiones el estudiante puede equivocar tales procedimientos, puesto que no identifica cuándo aplicar un procedimiento u otro, rescatando de la memoria los últimos temas "estudiados".

En los ejemplos anteriores se hizo evidente que los estudiantes pretendían reproducir una técnica, algoritmo o procedimiento para solucionar el reactivo 5. Los errores cometidos por los estudiantes, ofrecen pautas al profesor sobre los conflictos que se desarrollan en torno a un concepto y permiten tomar algunas medidas para tratar evitarlos. Pero, ¿qué sucede con los estudiantes que resuelven adecuadamente el reactivo 5? En la siguiente página presentamos la reproducción de un alumno que resolvió correctamente el reactivo analizado.

Cuando un estudiante resuelve un reactivo correcto, ¿Significa que comprendieron el tema? ¿Pueden justificar el procedimiento empleado? ¿Comprenden el papel que juega lambda en la ecuación vectorial de la recta? ¿Pueden identificar que P será un punto para cada valor que tome lambda en los reales? ¿Comprenden que los puntos obtenidos conforman un conjunto y describen una recta? ¿Comprenden que el vector de dirección no necesariamente es parte de la recta? ¿Comprenden que el vector de dirección no necesariamente pasa por el punto donde pasa la recta? Para tratar de dar respuesta a estas preguntas, se realizaron entrevistas a estudiantes que resolvieron adecuadamente el reactivo en cuestión y encontré que aún en estos casos algunos de ellos también pueden poseer conceptos erróneos sobre la ecuación vectorial de la recta. Como muestra de ello, presentamos algunas preguntas que se les plantearon y las respuestas que dan a ellas, diferentes estudiantes:

P15: ¿El plano tiene vector de dirección?
E16: Sí, porque está conformado por un conjunto de rectas y en este caso sería 2, 7, 3 en el caso del plano $2x + 7y + 3z - 16$

*Sea **a** el vector de dirección de la recta **a** (a_1, a_2, a_3) como*

Es $\parallel$ al plano 2x + 7y + 3z – 16 = 0 → el vector normal del

Plano es $\perp$ al vector de dirección de la recta. → su producto punto es cero

*Vector normal **e** (2, 7, 3) y **a** (a_1, a_2, a_3)*

→ $\mathbf{e} \cdot \mathbf{a} = 0$ → $(2, 7, 3) \cdot (a_1, a_2, a_3) = 0$

$$2a_1 + 7a_2 + 3a_3 = 0$$

Análogamente para el otro plano x - 2y + 8z + 13 = 0

*Vector normal **b** (1, -2, 8) y **a** (a_1, a_2, a_3)*

→ $\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = 0$ → $(1, -2, 8) \cdot (a_1, a_2, a_3) = 0$

$$a_1 - 2a_2 + 8a_3 = 0$$

Tenemos que:

$$2a_1 + 7a_2 + 3a_3 = 0$$

$$-2 \mid \quad a_1 - 2a_2 + 8a_3 = 0$$

$$2a_1 + 7a_2 + 3a_3 = 0$$

$$-2a_1 + 4a_2 - 16a_3 = 0$$

$$11a_2 - 13a_3 = 0$$

$$a_2 = \frac{13}{11}a_3$$

$$a_1 - 2a_2 + 8a_3 = 0$$

$$a_1 - 2\left(\frac{13}{11}a3\right) + 8a_3 = 0$$

$$a1 - \frac{26}{11}a3 + 8a_3 = 0$$

$$a1 + \frac{62}{11}a3 = 0$$

$$a1 = -\frac{62}{11}a3$$

Como dejamos todo en términos de a_3, realizamos la sustitución

→ **a** (a_1, a_2, a_3)

$$\mathbf{a}\left(-\frac{62}{11}a3, \frac{13}{11}a3, a3\right)$$

*Si hacemos que $a_3 = 11$ → **a** (-62, 13, 11)*

*Como ya tenemos **a** y el P(6, -1, 3), hallamos la ecuac. de la recta*

$P = P1 + \lambda\mathbf{a}$

$P = (6, -1, 3) + \lambda(-62, 13, 11)$ → *Ecuación general*

$(x, y, z) = (6, -1, 3) + (-62\lambda, 13\lambda, 11\lambda)$

$(x, y, z) = (6 - 62\lambda, -1 + 13\lambda, 3 + 11\lambda)$

$$\frac{x-6}{-62} = \frac{y+1}{13} = \frac{z-3}{11}$$ ← *Ecuación simétrica*

$x = 6 - 62\lambda$

$y = -1 + 13\lambda$ *ecuaciones paramétricas*

$z = 3 + 11\lambda$

El estudiante considera, en este caso, que el vector normal sería un vector de dirección para todas las rectas que están en el plano, cuando en realidad este vector será perpendicular a todas las rectas. Además, parece estar viendo el plano como una superficie reglada, lo que daría un vector dirección para todas ellas, pero está dejando de lado muchas otras rectas del plano.

Cuando se le cuestiona el porqué el producto punto entre el vector normal y el vector que se busca debe dar cero, encontramos respuestas como estas:

En un caso:

E6: Ahora, por ser paralelas hay una propiedad que dice que el producto punto de dos vectores de dirección es cero

En otro caso:

E27: ¿Por qué debe dar cero? [...] no recuerdo [...] ¿por qué?

Después de resolver el sistema de ecuaciones y obtener las componentes a_1 y a_2 del vector **a** en función de a_3, se le pregunta:

P41: ¿a_3 sólo puede tomar el valor de 11?
E42: Bueno en este caso, pienso que sí

Considerando, que el principal concepto matemático de este trabajo es la ecuación vectorial de la recta, se cuestionó a diferentes estudiantes sobre el significado de los elementos que la conforman y, aun siendo estudiantes que resolvieron correctamente el reactivo 5, tuvieron algunas dificultades o simplemente dicen no recordar.

En un caso:

P54: ¿Qué significa lambda?
E55: [...] no recuerdo
P56: Observemos que 6, -1, 3 es p_1 un punto y –62, 13, 11 es el vector dirección y lambda está multiplicando el vector dirección, la suma de esto es igual a P, ¿qué es P?
E57: [...] no recuerdo [...] no

Otro estudiante responde:

P30: Y P ¿qué significa?
E31: P es la ecuación de la recta por así decirlo
P32: P ¿es?

E33: Digamos que es una letra, que igual puede ser a, b o c que se va a referir o nos va a denotar lo que es la ecuación de la recta.

En otro caso:

P27: "a" es un vector de dirección, y ¿P_1?
E28: Es un punto por donde pasa el vector de dirección, por donde va a pasar el plano, por donde va a pasar la recta que estoy buscando
P29: Y ¿el vector de dirección, pasa por ese punto?
E30: Sí

Otro caso:

P61:Y lambda, ¿qué es?
E62: ¿Lambda? creo que viene siendo como un ángulo, un ángulo el cual nosotros [...], ese casi mayormente no [...] hallamos su valor ya a lo último en la ecuaciones simétricas, las ecuaciones van a ser su valor de lambda

En resumen, se puede observar de las producciones de los estudiantes y de las entrevistas realizadas, que se presentan dificultades en la interpretación de la ecuación vectorial de la recta, lo cual interpretaremos como una falta de significado para:

- mirar a P como un conjunto de puntos;
- considerar que los puntos que integran P, son el resultado de operaciones con vectores;
- reconocer que el vector dirección de la recta no necesariamente tiene que pertenecer a ella;
- asimilar que λ toma valores en los reales, lo que permite obtener infinitos puntos que conforman una recta.

Específicamente para resolver el reactivo 5 intervienen conceptos que juegan papeles importantes. Se mostró que algunos estudiantes no poseen el dominio sobre dichos concepto lo cual repercute en algunos conflictos. Los conceptos a los que se hace referencia son:

- Ecuación vectorial del plano, que me permite obtener el vector normal a partir de los coeficientes de las variables x, y, z.
- Vector normal del plano, el cual no pertenece al plano como algunos estudiantes afirmaban, ya que es perpendicular al plano.
- Producto punto, comprender que al multiplicar el vector normal con el vector de dirección de la recta (el cual se desconoce) el resultado debe ser igual a cero ya que al

requerir que la recta sea paralela al plano y dado que el vector normal es perpendicular al plano, entonces también será perpendicular a la recta.

- Integrar un sistema de ecuaciones, para poder obtener las componentes de tal modo que se tenga un vector perpendicular a cada uno de los vectores normales. Sistema de ecuaciones que resulta ser indeterminado ya que se cuenta únicamente con dos ecuaciones con tres incógnitas, de modo que se podrá obtener una infinidad de soluciones, de las cuales una resulta ser la adecuada para simplificar el trabajo algebraico.

1.3 Elementos del entorno de estudio

La toma de datos para este trabajo ha sido posible gracias a la colaboración de la LEM Landy Sosa Moguel, actual profesora de la asignatura Geometría Analítica y quien está trabajando con 33 estudiantes de primer semestre de la licenciatura en enseñanza de las matemáticas, entre los cuales se encuentran 3 estudiantes que llevaron este curso el año pasado (3 repetidores). Los estudiantes provienen de distintos sistemas educativos tales como propedéuticos (preparatorias y bachilleratos) y bivalentes (bachilleratos técnicos).

Los estudiantes de los bachilleratos propedéuticos cursaron 5 semestres de matemáticas: álgebra, geometría plana, trigonometría-geometría analítica, precálculo y probabilidad-estadística. Entre estos cursos obligatorios, en la asignatura de Geometría analítica se aborda la ecuación general de la recta, así como la denominada punto-pendiente. También como cursos obligatorios se llevaron dos de Física, siendo que en el primero de ellos se aborda el tema de vectores. Además, en el plan de estudios de este bachillerato se ofrece como cursos optativos un semestre de Geometría analítica donde se aborda el concepto de lugar geométrico y considerando que este curso tiene el carácter de optativo, no todos los estudiantes no cursaron en su bachillerato. En cada curso se destinó un total de 4 horas semanales de clases.

Los estudiantes de este curso provenientes de los bachilleratos técnicos se llevaron 5 semestres de matemáticas obligatorias: aritmética-álgebra, geometría plana, geometría analítica, precálculo y cálculo diferencial e integral. En este sistema no se tenían asignaturas optativas. En casa asignatura contaban con 5 horas de clases a la semana. Debe tomarse en cuenta que los programas de bachilleratos técnicos se vieron modificados a partir del ciclo escolar 2004-2005, lo cual reforma el currículo a 6 semestres de matemáticas reduciendo el número de horas de clases a 4 por semana, sin embargo los estudiantes con quienes se realiza este trabajo no se vieron involucrados en este cambio.

Por otro lado, los alumnos admitidos a la Facultad de Matemáticas por medio del examen de admisión EXANI II, del CENEVAL, son evaluados en el área de matemáticas tomando en cuenta los conocimientos mínimos, considerados como prerrequisitos para los cursos de primer semestre y en función de los resultados se ofrecen cursos de regularización para aquellos que lo requieran durante aproximadamente 30 horas, aunque esto es opcional.

El análisis realizado respecto a la producción de los estudiantes, se realizó por medio de una prueba escrita correspondiente al primer examen parcial del curso. Las calificaciones de esta prueba reporta 10 estudiantes reprobados (30% del grupo), incluyendo 1 estudiante repetidor. Considerando el porcentaje de reprobados, se resuelve aplicar un examen de recuperación; del cual se reduce a sólo 3 estudiantes reprobados (9% del grupo). Los índices de reprobación en el primer parcial, se ha estado produciendo por varios cursos conduciendo en cada uno a la aplicación de la prueba de recuperación; por mencionar un ejemplo en el curso del ciclo septiembre de 2003 a enero de 2004, del grupo de 28 estudiantes de primer semestre de la licenciatura en matemáticas, con 4 de ellos como repetidores, 15 estudiantes reprobaron el primer examen parcial (53% del grupo), incluyendo entre estos a 3 de los repetidores. Después de aplicar el examen de recuperación, el número de estudiantes reprobados se redujo a 9 (32% del grupo).

Hasta el momento, todos los datos para análisis han sido documentos escritos y reunidos y proporcionados por medio de la profesora y no se ha tenido contacto con los estudiantes.

En conclusión, el grupo de estudiantes cuyas producciones se analizaron proviene de distintos sistemas educativos y por consiguiente no se enfrentaron con el mismo conjunto de conocimientos, en lo que se refiere a los conceptos de vectores y lugar geométrico, esta situación se repite año con año por lo cual debe ser considerado en el curso de Geometría analítica y en particular al momento de abordar la ecuación vectorial de la recta.

1.4 Determinación de objetivos

Podemos observar en las producciones de los estudiantes, que existen fuertes tendencias a reproducir lo que el profesor hace en el salón, lo cual parece reforzar la idea de que para los estudiantes, estudiar matemáticas es aprender algoritmos. Prevalece una falta de análisis y reflexión sobre sus propias actuaciones, de modo que al enfrentarse a situaciones problemáticas que involucran distintos conceptos, están más propensos a cometer errores y en la mayoría de los casos se limitan a reproducir procedimientos, técnicas o algoritmos, lo cual evidentemente no significa que se haya dado un aprendizaje.

En el análisis realizado, se encontraron algunas dificultades en la comprensión de conceptos que son considerados básicos para la solución del reactivo 5 como son: la identificación y nomenclatura de los vectores, la pérdida de significado del producto punto, la relación del producto punto con vectores perpendiculares y la interpretación del vector normal del plano como un vector perpendicular a éste y por consiguiente no coplanar. Además, se hicieron evidentes algunos conflictos sobre las interpretaciones dadas a los elementos y variables que conforman la ecuación vectorial de la recta, se observa en algunos casos una falta de significado de la variable P, como conjunto de puntos que describe un lugar geométrico; y el dominio sobre el cual puede tomar valores lambda.

En resumen, las dificultades asociadas con el estudio de la ecuación vectorial de la recta, presentadas en las producciones de los estudiantes pueden interpretarse como una ausencia de significado y en una algebrización del estudio de la recta. Lo último se manifiesta en una irresponsabilidad del estudiante ante sus propias producciones, que además está respaldado con el contrato didáctico. Esto es, en lo permitido por el profesor, en la forma de organización del programa de estudio y lo que se pide a los estudiantes en los exámenes como muestra de su aprendizaje. Por lo que respecta a la ausencia de significado, se asocia a un simple aprendizaje memorístico que no permite transferir el conocimiento a nuevas situaciones. Hechos que pueden interpretarse como un fenómeno didáctico ya que esta situación se repite los curso de geometría analítica.

Como Chevallard (1998) expresa *“saber matemáticas” no es solamente saber definiciones y teoremas para reconocer la ocasión de utilizarlos y de aplicarlos, es “ocuparse de problemas” en un sentido amplio que incluye encontrar buenas preguntas tanto como encontrar soluciones*. De aquí el objetivo de este trabajo, es presentar elementos que puedan considerarse para el diseño de una secuencia didáctica para el estudio de la ecuación vectorial de la recta.

Cuando se enseña la ecuación vectorial de la recta se recurre a gráficos como el que se muestra en la figura 1, donde se incluyen el vector dirección **v** y el punto dado **A**; y a partir de estos elementos se va construyendo los puntos **P** al sumar el vector de posición del punto A con el vector dirección, cuando éste es afectado por un escalar. Todo lo anterior involucra conceptos tales como vector, vector de posición, operaciones con vectores (especialmente suma y producto por un escalar), vector paralelo; todos estos abordados en el curso previo al tema de ecuación vectorial de la recta, además el concepto de conjunto, considerado como parte de cursos de bachillerato.

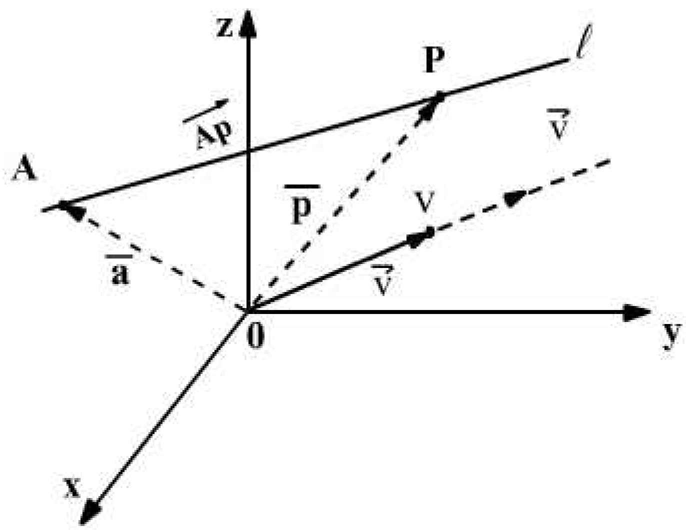


Figura 1

1.5 Antecedentes del trabajo

Algunos trabajos realizados que abordan temas relacionados como las dificultades en el trabajo con vectores, la importancia de la visualización en Matemáticas y particularmente el caso de la Geometría; se comentan a continuación.

- ✓ Sierpinska, A., Hillel, J. & Dreyfus,T.(1998): Evaluation of a teaching design in linear algebra: the case of vectors. Grenoble, France: La Pensée sauvage.

- ✓ Fava, N. y Corach, G. (2001). *Vectores en el plano y en el espacio.* RELME 15 (Argentina: 23-27 JULIO, 2001) Buenos Aires: Estudio Sigma S.R.L., p.38
  Este material está destinado a los docentes que enseñan Matemáticas en las escuelas de Nivel Medio y desarrolla aspectos vinculados a los Vectores en el plano y en el espacio. Se propone un recorrido conceptual de los contenidos que se identifican como dificultosos y de aquellos que funcionan como requisitos previos para la construcción del conocimiento sobre ellos.

Está organizado en dos secciones una correspondiente a los Vectores en el plano y la otra a los Vectores en el espacio, lo cual permite desarrollar los contenidos en un sistema común para los estudiantes, favoreciendo así la percepción visual.

✓ Caserio, M., Guzmán M. y Vozzi, A. (2001). *Una estrategia didáctica para el aprendizaje de superficies. RELME 15* (Argentina: 23-27 JULIO, 2001) Buenos Aires: Estudio Sigma S.R.L., p.95

En este trabajo se describe una experiencia realizada durante tres años con alumnos del 1er. año dela carrera de Ingeniería en Sistemas de Información, de la Universidad Tecnológica Nacional, en Álgebra y Geometría Analítica. Intenta, a través de una estrategia didáctica, incentivar en los estudiantes el espíritu de búsqueda, de indagación, favoreciendo su independencia y creatividad, pretendiendo llevar a los alumnos a una forma de pensamiento que supera el mero aprendizaje memorístico, y que tiene como meta la comprensión, la retención de la información y el uso activo del conocimiento.

Debido a cuestiones como son la carga horaria de la materia (5 horas-semana), el gran número de alumnos, la heterogeneidad de los mismos, etc. el tema de superficies no se alcanza a desarrollar, no obstante la importancia del mismo para el programa de Análisis Matemático II. Debido a esto, se implementa una estrategia didáctica apoyado con la herramienta informática, trabajando en grupos con la orientación del docente.

Se optó por desarrollar la experiencia con 6 de las 18 comisiones de primer año dela carrera, involucrando los tres turnos en los que se dicta la asignatura, con un promedio de 60 alumnos cada una, abordando el tema de superficies en dos formas diferentes, una llamada tradicional en tres comisiones y otra que es la propuesta de la experiencia llamada experimental en las otras tres.

- *Tradicional: Los estudiantes realizan el estudio de la unidad temática contando sólo con la bibliografía propuesta y son evaluados de manera convencional en el examen final, el que se divide en dos partes: en la primera, la "práctica" en la cual los alumnos deben resolver ejercicios y/o problemas de los temas incluidos en el programa. De resultar "aprobados", el examen continúa con la segunda parte, en la cual el docente le solicita el desarrollo de algunos temas "teóricos".*

- *Experimental: El docente desarrolla, en forma sucinta, el tema teórico y propone la realización de un trabajo que incorporará algún programa de cálculo simbólico con el que los estudiantes ya estén familiarizado, como así también textos y/o publicaciones que pudieran resultarles de utilidad además de la propuesta bibliográfica. El trabajo consiste en el "estudio" de alguna superficie cuya ecuación se da y se aclara que "estudiar" una superficie involucra: analizar las simetrías respecto de los ejes y/o planos coordenados, las razas sobre cada plano y las intersecciones con planos paralelos a los coordenados y oblicuos, expresar algebraicamente las conclusiones obtenidas, clasificar las secciones cónicas e identificar por simple inspección gráfica si existen elementos geométricos generadores de la superficie, en cuyo caso se deberá describir el movimiento que deben realizar lo mismo a para obtener la superficie en estudio.*

Desde el punto de vista cuantitativo, y considerando únicamente el tema superficies se pudo constatar los siguientes porcentajes de alumnos aprobados:

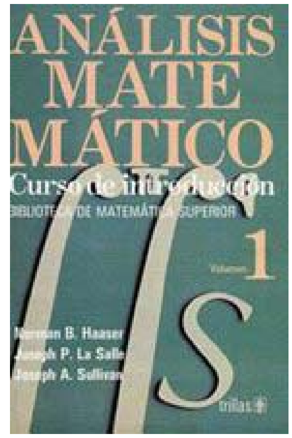
Año	*Tradicional*	*Experimental*
1997	*33 %*	*58 %*
1998	*31 %*	*65 %*
1999	*37 %*	*72 %*

Tabla 2

En cuanto a la respuesta obtenido en cada grupo cualitativamente, en la propuesta tradicional, al momento de la evaluación, se evidencia una buena respuesta en la resolución de ejercicios prácticos como los propuestos en los textos y la reproducción fiel de los conceptos explicitados en la bibliografía, pero es notoria la dificultad en la percepción espacial de los resultados que obtienen como así también la correspondencia entre le concepto matemático y la representación gráfica

✓ Anido, M., Roberto López y Héctor Rubio Scola (2002). *Una ingeniería didáctica construida alrededor de las familias de supercónicas como sistema genérico organizacional*. [En línea] Disponible en:
http://departamentos.unican.es/digteg/ingegraf/cd/ponencias/307.pdf [1 de marzo, 2004].

CAPITULO 2. MARCO TEORICO Y METODOLÓGICO



La teoría de situaciones didácticas descansa en la tesis de que el sujeto necesita construir por sí mismo sus conocimientos mediante un proceso adaptativo similar al que realizaron los productores originales de los conocimientos que se quiere enseñar. Por lo tanto, considera que el significado de una noción no puede dársele a un alumno, sino que es él quien debe construirlo a partir de un conjunto de problemas en donde tal noción se ve involucrada. Para lograr esto el profesor trabaja en el diseño, selección y organización de contenidos, técnicas, actividades con el objetivo de que el alumno construya la noción objetivo, lo cual se ve reflejado cuando esta noción sea utilizada con otras, mediante el establecimiento de relaciones.

Sin embargo, en **el análisis que se propone, se considera al margen de la discusión sobre el qué enseñar**, debido a que esto queda determinado por el programa de asignatura Geometría analítica del primer semestre de estudios superiores. Así, nos enfocaremos a la interpretación de cómo los estudiantes aprenden la ecuación vectorial de la recta y las dificultades asociadas a este aprendizaje con el objetivo de proponer elementos que ayuden para el diseño de una secuencia didáctica.

En la búsqueda de las interpretaciones de los estudiantes al aprender la ecuación vectorial de la recta es importante entender cómo es que se produce este proceso. Para Brousseau (1986), el aprendizaje se produce por adaptación a un medio en el cual encuentra dificultades que lo conducen a procesos de desequilibrio, asimilación y acomodación del conocimiento en el sentido que propone Piaget (1975) en su teoría de la equilibración.

Para favorecer un proceso de construcción de conocimientos nuevos, y considerando que el aprendizaje se da por adaptación, Ruiz (2001) propone, que es necesario plantear un problema al alumno quien implementará una estrategia poniendo en marcha los conocimientos que posee para dar una respuesta inicial. Seguidamente, debe llevarse al alumno a una situación en la cual la estrategia antes empleada no conlleve a una solución apropiada al mismo problema, lo cual tendría un efecto de desequilibrio. Con esto, el alumno tendrá que concebir una nueva estrategia que dota de sentido al conocimiento que se pretende enseñar, creando así los procesos de asimilación y acomodación.

Al pretender que los estudiantes aprendan el concepto de la ecuación vectorial de la recta, un conocimiento cuyos orígenes se dan en un contexto no didáctico, reconocemos que dicho concepto se sometió a ajustes para ser insertado en la escuela. A los procesos de ajuste a los que nos referimos, se conocen con el término transposición didáctica y que se refiere al proceso mediante el cual tiene lugar la acción de transponer un saber hacia un sitio didáctico, o sea, llevar un saber al ámbito escolar. Esto nos lleva a diferenciar la matemática de la matemática escolar, ya que requiere de una despersonalización del saber, dejando de lado los procesos reales que condujeron a dicho saber, así como los ires y venires del investigador, lo que a su vez permite que el saber pase de ser personal a público. Así, la matemática escolar se distingue de la matemática por su explícita pretensión didáctica y por el cambio de su epistemología.

Por otro lado, resulta importante considerar que la construcción del conocimiento que se propone se gestionaría en el aula y por lo mismo se encuentra inmerso en una situación social que permite la comunicación y justificación entre los participantes a diferentes niveles –alumno, alumno-alumno, alumno-profesor. Entonces se verá afectado por factores tales como: la evolución y desarrollo del objeto matemático así como la interpretación y enfoque que presente el profesor respecto a dicho concepto que se pretende enseñar, las interpretaciones y concepciones de los estudiantes así como las interacciones que se produzcan entre los estudiantes para validar y justificar sus acciones. Por tal razón, consideramos que es parte de lo que se conoce como construcción social del conocimiento matemático, ya que se trata de interacciones entre los procesos de pensamiento, la epistemología del conocimiento y las prácticas humanas (Cantoral, 2001).

Considerando los elementos antes expuestos se pretende proporcionar elementos que ayuden integrar una propuesta de secuencia didáctica en la que los estudiantes, por un lado, puedan construir la ecuación vectorial de la recta y por otro lado, superar la falta de significado de conceptos involucrados con el objeto de estudio. Por lo tanto, se reconoce a la ingeniería didáctica como teoría fundamental para el desarrollo de este trabajo y de la cual se aborda a continuación.

2.1 Ingeniería didáctica

El término ingeniería didáctica surge a inicios de la década de los 80's en el seno de la escuela francesa, como analogía al que hacer del ingeniero y cuyo sustento teórico proviene de la teoría de la transposición didáctica, desarrollada por Chevallard, y de la teoría de las situaciones didácticas, introducida por Brousseau.

En didáctica de las matemáticas, la ingeniería didáctica, se utiliza bajo un doble aspecto: como metodología de investigación y como producción de situaciones de enseñanza-aprendizaje. En el primer aspecto se caracteriza fundamentalmente porque sus productos son construidos a partir de un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza. Y en el segundo aspecto, es *un producto (conjunto de secuencias de clases), resultante de un análisis a priori, y un proceso en el transcurso del cual el profesor ejecuta el producto adaptándolo a la dinámica de la clase*. (Douady, 1996, p.61)

Para efectos de este trabajo, se considera a la ingeniería didáctica, en el primer aspecto, esto es, como metodología de investigación y como tal se ubica en los registros de estudios de caso y basada en la confrontación entre el análisis a priori y a posterior (Artigue, 1995).

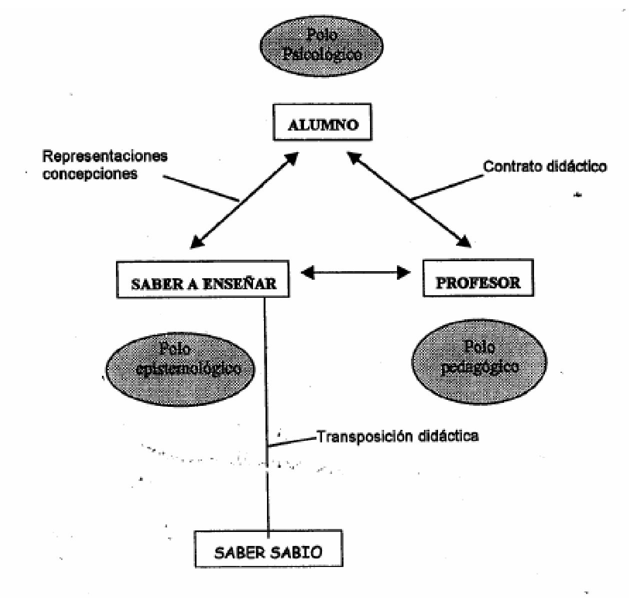
En la elaboración de una ingeniería didáctica se distinguen cuatro las fases fundamentales: análisis preliminar, diseño de la situación didáctica y su análisis a priori, experimentación y por último el análisis a posteriori y validación.

Considerando que la intención de este trabajo es disponer de elementos que ayuden en el diseño de una secuencia didáctica para la enseñanza de la ecuación vectorial de la recta, se desarrollará una de las fases fundamentales que distingue la ingeniería didáctica y que corresponde al análisis preliminar.

2.2 Componentes del análisis preliminar

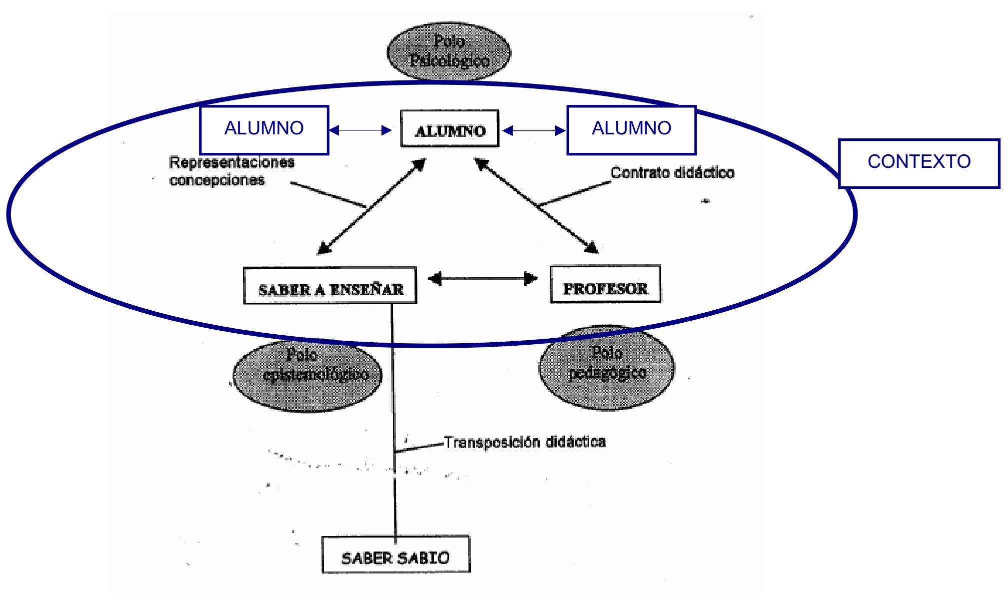
Artigue (1995) distingue varias dimensiones ligadas a los procesos de construcción de ingenierías didácticas, en las que se analizan todos los actores del sistema didáctico y sus relaciones, y que corresponden a la dimensión epistemológica, la cognitiva y la didáctica.

Tomando en cuentan que la didáctica de las matemáticas se considera como el estudio de las interacciones entre un saber que se ve transformado para ser introducido al sistema educativo en el cual interactúan el profesor y el alumno, *con el objeto de optimizar los modos de apropiación de ese saber por el sujeto* (Brousseau, 1998, p.88), como se muestra en el Esquema 1:



Esquema 1

Y reconociendo que en el aprendizaje escolar no estaría exento de las interacciones sociales, entonces el esquema anterior podría ser considerado del modo siguiente y que se presenta en el Esquema 2:



Esquema 2

Razón por la cual consideramos importante incorporar otra dimensión, la sociocultural, que se describe a continuación.

* Dimensión sociocultural: asociada a la construcción del conocimiento dentro de las prácticas sociales y el contexto mismo. Esta dimensión será reflejada en la propuesta didáctica en la fase de formulación y validación.

Como expone Cantoral (2001), la aproximación socioepistemológica de la investigación en matemática educativa se ocupa específicamente del problema que plantea la construcción social del conocimiento y de su difusión institucional y considera la construcción social del conocimiento matemático avanzado como el conjunto de interacción que se dan entre tres polos: Los procesos avanzados del pensamiento, La epistemología de la matemática avanzada y Las prácticas humanas altamente especializadas.

Así se toma en cuenta desde las creencias del profesor y su conocimiento respecto al contenido por enseñar, hasta las relaciones que se establecen entre los estudiantes y el profesor. En relación al profesor, sus creencias y conocimientos incluyen en gran medida respecto al enfoque con que presentará el contenido así como a la forma de interactuar y proponer la dinámica misma dentro del aula. Más aún, los conocimientos que se abordan son resultados de una transposición didáctica y que se encuentra reflejada en los libros de texto y que de algún modo logran un consenso y una socialización del conocimiento.

En este sentido, consideramos que la secuencia didáctica reflejará más que las creencias de un profesor consideraciones epistemológicas en torno al concepto de vector que permitan favorecer la construcción de significado para la ecuación vectorial de la recta.

Por otro lado, los estudiantes incluyen unos a otros en la construcción del conocimiento, ya que sus argumentaciones y justificaciones ante otros conlleva a un intercambio de ideas en la búsqueda de un consenso. Sin embargo, debemos considerar que este proceso tendría su origen en cada uno de los estudiantes, ya que primero debe el estudiante en sí mismo generar sus argumentos y justificarlos para sí mismo antes de plantearlos a los demás. Pero, también es importante tomar en cuenta que para que el estudiante argumente requiere rescatar de la memoria los conocimientos necesarios y en muchas ocasiones este rescate requiere de un auxilio externo, por parte del profesor o de sus pares, lo cual podríamos mirar como una construcción o más bien una reconstrucción social de la memoria.

Resulta conveniente entender que los tres polos a los que se refieren en la construcción social del conocimiento matemático avanzado interactúan entre sí, pero uno de los tres polos, el correspondiente a las prácticas humanas resulta ser el que genera relación entre los otros dos y en cierto sentido es el que hace evolucionar a los otros dos. Es por esto, que este trabajo pretende sugerir una propuesta de práctica social en torno al aprendizaje de la ecuación vectorial de la recta tomando en consideración, los procesos avanzados del pensamiento que pueden verse favorecidos por reconstrucción social o en su caso la construcción social mediante la interacción alumno-alumno.

Particularmente, para este trabajo debe considerarse en la dimensión sociocultural en el sentido de ser un estudio situado en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán, con alumnos con característica particular como son el ser estudiantes de las licenciaturas en Actuaría, Matemáticas y Enseñanza de las Matemáticas, quienes habían llevado un curso obligatorio de geometría analítica en el bachillerato y que habían aprobado el curso de geometría analítica en la licenciatura como parte de sus asignaturas obligatorias en primer semestre.

De las dimensiones consideradas en la ingeniería didáctica se desarrollaron la didáctica y la cognitiva. En relación a la dimensión epistemológica, únicamente presentamos un primer acercamiento histórico sobre el desarrollo y evolución de los vectores, mismo que tratamos a continuación.

- **UN ACERCAMIENTO HISTÓRICO AL DESARROLLO DE LOS VECTORES**

Esta dimensión hace referencia a las características del saber matemático puesto en funcionamiento en la escuela y por lo tanto estaríamos haciendo alusión a la ecuación vectorial de la recta. Reconociendo el papel que juega el concepto de vector, en el aprendizaje de nuestro objeto de estudio, en esta sección se pretende mostrar el uso que se le ha dado a éste último concepto en diversos momentos de la historia y que nos lleva a una explicación de su importancia dentro de la Matemática, en particular para la Geometría, y de la Física misma.

El concepto de vector tiene sus orígenes en contextos físicos y partiendo del hecho de que la Física tiene por objeto el conocimiento del mundo exterior, es decir, la comprensión de las leyes que rigen la naturaleza y sus fenómenos y la Geometría, como parte de la Matemática, pertenece más al mundo de las ideas y puede crearse los objetos que luego va a estudiar. En sus comienzos, la Geometría tomó estos objetos a imagen y semejanza de los que se veían y observaban en la Naturaleza: por lo que se le consideró como una ciencia "visual" y la parte más intuitiva de la Matemática.

Geometría y Física crecieron observando la Naturaleza, la primera prestando más atención a la "forma" de los objetos y la segunda a su movimiento, pero como todo movimiento supone una trayectoria, una y otra ciencia se vieron siempre de forma inseparable. Esto hizo que los grandes cambios en la historia de la Física fueran siempre acompañados con los grandes cambios en la historia de la Geometría, y recíprocamente los adelantos en la historia de la Geometría influían en la historia de la Física.

La palabra VECTOR (como la palabra vehículo, deriva del Latín *vehĕre*; llevar) era primero un término técnico en geometría astronómica. Posteriormente apareció en un diccionario técnico de 1704: El léxico Technicum I. de J. Harris,

> *"Una línea supuesta dibujado de cualquier planeta en movimiento alrededor de un Centro, o el foco de una elipse, ese centro o foco, es llamado por algunos escritores de la nueva astronomía, vector; esto es, la línea por la cuál parece el planeta ser llevado alrededor de su centro."*

La distinción entre matemáticas puras y aplicadas no existía en la época de Euler y, para él, el universo físico era un campo apropiado, que le permitía aplicar sus métodos de análisis. Los fundamentos de la mecánica clásica los estableció Newton; pero Euler fue el principal arquitecto, considerándolo como el iniciador de la mecánica en la forma actual al modificar el formulismo de Newton por el algebraico y analítico. En su tratado *Mecánica Analítica* de 1736, presentó por primera vez explícitamente el concepto de una partícula o un punto de masa; fue también el primero en estudiar la aceleración de una partícula que se desplaza a lo largo de una curva cualquiera y en utilizar la idea de "vector" o "magnitud geométrica" en relación a la velocidad y la aceleración.

El concepto de vector probablemente sea de Bollzano, quien en 1804, escribió un libro titulado: *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie*. (Consideraciones sobre algunos objetos de la geometría elemental). En este trabajo, considera a lo puntos, las rectas y los planos como conceptos indefinidos e introduce operaciones entre ellos.

El vector apareció generalmente en la frase radio vector. El término francés era *rayon vecteur* y se puede encontrar por ejemplo en *Traité de mécanique céleste* de Laplace (1799-1825). Después, en 1826 el término rayon vecteur es utilizado en un contexto no-astronómico por Cauchy en *Lecons sur les Applications du Calcul Infinitesimal a la Géométrie y* se introduce en el capítulo inicial de los "Preliminares":

> *"Una línea AB, realizada de un punto que se supone fijo A a un punto B que se supone móvil, será indicada generalmente bajo el nombre de vector del radio"* (p.14)

Radio vector aparece en inglés en 1831 *Elements of the Integral Calculus* (1839) de J. R. Young::

"… cuando el ángulo Ω entre el radio vector y el eje fijo se toma para la variable independiente, el fórmula es…."

Los vectores, que eran utilizados en mecánica en la composición de fuerzas y velocidades ya desde fines del siglo XVII, no tuvieron repercusión entre los matemáticos hasta el siglo XIX cuando Gauss usa implícitamente la suma vectorial en la representación geométrica de los números complejos en el plano y cuando Bellavitis desarrolla sus "equipolencias", un conjunto de operaciones con cantidades dirigidas que equivale al cálculo vectorial de hoy.

El paso siguiente lo da Hamilton, quien inicia el estudio de los vectores. Se le debe a él el nombre de 'vector' producto de la creación de un sistema de números complejos de cuatro unidades, denominado "cuaterniones" usados hoy en día para el trabajo con rotaciones de objetos en el espacio.

Hamilton crearía un nuevo significado para el vector pero él utilizó radio vector en la manera convencional *On a General Method in Dynamics Philosophical Transactions Royal Society* (parte II para 1834, pp. 247-308); artículo 14.

Los términos VECTOR y ESCALAR aparecen en *On quaternions* un documento presentado por Hamilton en una reunión de la Royal Irish Academy el 11 de noviembre de 1844. Este documento adopta la convención de denotar un vector por una sola letra (griega), y concluye con una discusión de las fórmulas para aplicar rotaciones a los vectores conjugando con quaternions de la unidad. Está en las páginas 1-16 en el volumen 3 de los procedimientos de la Royal Irish Academy, cubriendo los años 1844-1847, y el volumen se fecha 1847. Lo que sigue es de la página 3:

"A causa de la facilidad con la cual esta expresión imaginaria, o la raíz cuadrada de una cantidad negativa, es construida por una línea derecha que tiene dirección en el espacio, y de tener x, y, z para sus tres hachas rectangulares, el ha inducido que llame la expresión trinomial sí mismo, así como la línea que representa, un VECTOR. Un quaternion se puede decir consiste generalmente en una parte real de un vector. Fijar una atención especial en esta última parte, o el elemento, de un quaternion, dándole un nombre especial, y denotándolo en muchos cálculos por un solo símbolo especial, aparece al autor haber sido una mejora en su método de ocuparse del tema: aunque la noción general de tratar los componentes de la parte imaginaria como coordenadas había ocurrido a él en su primer investigación."

Lo que sigue es de la página 8:

"Es, sin embargo, una particularidad del cálculo de quaternions, por lo menos según lo modificado últimamente por el autor, y uno que se parezca a él importante, que selecciona dirección en espacio, pero los trata igualmente relacionando a ese espacio adicional, o simplemente la dirección ESCALAR, que recientemente se ha llamado "delantera."

En el tiempo de Hamilton el radio-vector era un término establecido en astronomía. Hamilton explica que él está dando a vector del término un nuevo sentido en Lectura I de su *Lectures on Quaternions*. En el artículo 17 (P. 16) él describió la diferencia entre el vector y el radio-vector:

17. Para ilustrar más completamente la distinción que ahora mismo fue mencionada brevemente, entre los significados del "vector" y el "vector del radio" de un punto, podemos comentar que el RADIUS-VECTOR, en astronomía, y de hecho en geometría también, está entendido generalmente para tener solamente longitud; y por lo tanto ser expresado adecuadamente por un SOLO NÚMERO, denotando la magnitud (o la longitud) de la línea recta que es referida por este nombre generalmente (radio-vector) con respecto a la magnitud de una cierta línea estándar, que se ha asumido como la unidad de la longitud. Así, en astronomía, el Radio-Vector geocéntrico del sol es, en su valor medio, casi igual a noventa y cinco millones de millas: si, entonces, millón de millas se asuman como el estándar o la unidad de la longitud, el radio-vector geocéntrico del sol es igual (casi) a, o es (aproximadamente) expresable cerca, el número noventa y cinco: de manera que este solo número, 95, con la unidad aquí supuesta, resulta una representación o expresión adecuada para ese vector sabido del radio del sol.

Pero en el nuevo modo del discurso que aquí se propone para introducir, y que es guardado de la confusión con el más viejo modo por la omisión de la palabra "RADIO," el VECTOR del sol TIENE DIRECCIÓN, así como longitud. Es, por lo tanto caracterizado no suficientemente por CUALQUIER SOLO NÚMERO, tal como 95; pero REQUIERE, para su EXPRESIÓN NUMÉRICA COMPLETA, un SISTEMA DE TRES NÚMEROS; por ejemplo el rectangular o polar generalmente y bien conocido coordina del sol o el otro cuerpo o punto que lugar debe ser examinado…

[*The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1844–1850.]

1. Let an expression of the form

$$Q = w + ix + jy + kz$$

be called a *quaternion*, when w, x, y, z, which we shall call the four *constituents* of the quaternion Q, denote any real quantities, positive or negative or null, but i, j, k are symbols of three imaginary quantities, which we shall call *imaginary units*, and shall suppose to be

UN VECTOR es así una clase de TRÍO NATURAL (sugerido por Geometry): y encontraremos por consiguiente que los QUATERNIONS ofrecen un modo fácil simbólicamente de representar cada vector por una FORMA TRINOMIAL (ix + jy + kz); qué forma trae el concepto y la expresión de un vector en las conexiones posibles más cercanas con coordenadas cartesianas y rectangulares.

Hamilton, en sus "*Lectures on Quaternions*", no está satisfecho con introducir vector. Dentro de algunas páginas encontramos vectum, vehend, revector, provector, provectum, transvehend, transvectum, etc., e identidades como

Provectum = Provector + vector + Vehend.

El vector y el escalar también aparecen en 1846 en un documento *"On Symbolical Geometry"* en el *The Cambridge and Dublin Mathematical Journal* vol. I:

> *Si entonces damos el nombre de escalares a todos los números de la clase llamada generalmente verdadera, porque todos se contienen en la una escala de la progresión del número de negativo al infinito positivo [...]*

La primera ocurrencia del vector y del escalar en the *London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine* is in volume XXIX (1846) en el artículo *"On Quaternions; or on a new System of Imaginaries in Algebra"*:

> *La separación de las parte real e imaginaria de un quaternion es una operación tan frecuente, y se puede mirar como fundamental en esta teoría, que es conveniente introducir los símbolos que denotarán los dos resultados separados de esta operación. La parte algebraico real puede recibir, según la pregunta en la cual ocurre, todos los valores contenidos en la una escala de la progresión de número de negativo al infinito*

positivo; la llamaremos por lo tanto la parte escalar, o simplemente el escalar del quaternion, y formaremos su símbolo prefijando, al símbolo del quaternion, el Scal característico., o simplemente el S., donde ninguna confusión se parece probablemente presentarse de usar esta última abreviatura. Por otra parte, la parte algebraico imaginaria, geométrico siendo construido por una línea recta, o el radio vector, que tiene, generalmente para cada quaternion resuelto, una longitud resuelta y dirección resuelta en espacio, se puede llamar la pieza del vector, o simplemente el vector del quaternion; y puede ser denotado prefijando el Vect característico. o V…

simply S., where no confusion seems likely to arise from using this last abbreviation. On the other hand, the algebraically *imaginary* part, being geometrically constructed by a straight line, or radius vector, which has, in general, for each determined quaternion, a determined length and determined direction in space, may be called the *vector part*, or simply the *vector* of the quaternion; and may be denoted by prefixing the characteristic Vect., or V. We may therefore say that *a quaternion is in general the sum of its own scalar and vector parts*, and may write

$$\mathrm{Q} = \mathrm{Scal.\,Q} + \mathrm{Vect.\,Q} = \mathrm{S\,.\,Q} + \mathrm{V\,.\,Q},$$

or simply

$$\mathrm{Q} = \mathrm{SQ} + \mathrm{VQ}.$$

Posteriormente William Hamilton, (citado por Wilkins (2000)), emplea y hace referencia al concepto de módulo de un vector y lo explica cuando escribe:

19. Another general decomposition of a quaternion, into factors instead of summands, may be obtained in the following way:—Since the square of a scalar is always positive, while the square of a vector is always negative, the algebraical excess of the former over the latter square is always a positive number; if then we make

$$(\mathrm{TQ})^2 = (\mathrm{SQ})^2 - (\mathrm{VQ})^2,$$

and if we suppose TQ to be always a real and positive or absolute number, which we may call the *tensor* of the quaternion Q, we shall not thereby diminish the generality of that quaternion. The *tensor* is what was called in former articles the *modulus*;* but there seem to be some conveniences in not obliging ourselves to retain here a term which has been

used in several other senses by writers on other subjects; and the word tensor has (it is conceived) some reasons in its favour, which will afterwards more fully appear. Meantime we may observe, as some justification of the use of this word, or at least as some assistance to the memory, that it enables us to say that *the tensor of a pure imaginary*, or vector, is the number expressing the *length* or linear *extension of the straight line* by which that algebraical imaginary is geometrically constructed. If such an imaginary be divided by its own tensor, En el fragmento anterior se hace explícita la idea de módulo, al relacionarlo con la longitud de segmento de recta que representa la construcción geométrica del imaginario. Pero considerando que el denominado vector es la parte imaginaria del cuaternion, al elevarlo al cuadrado el resultado es (-1) y cálculo efectuado para obtener el módulo puede corresponder algebraicamente en la notación actual. Sin embargo, aunque Gauss operó intuitivamente los vectores de forma geométrica, en el trabajo de Hamilton se omite el enfoque geométrico a pesar de hacer referencia de dicho enfoque.

En el estudio que presenta Hamilton respecto de puntos, rectas y planos en el espacio, parte de lo que denominan Coordenadas Quinarias; y como sugiere su nombre, estaban integradas por cinco componentes. A continuación se presentan algunos fragmentos donde se describen algunas operaciones con estos elementos, tales como la equivalencia de puntos, el producto por un escalar, la suma de coordenadas y la definición de quinario unitario.

O being again an arbitrary origin; and the *five new and variable coefficients*, $x\,y\,z\,w\,v$, whereof the *ratios of the differences* determine the *position of the point* P, when the five points A ... E are given, may be called the *Quinary Coordinates of that Point* P, with respect to the given system of five points.

[5.] Under these conditions, we may agree to write, briefly,

$$\mathrm{P} = (x, y, z, w, v), \quad \text{or even} \quad \mathrm{P} = (x\,y\,z\,w\,v), \tag{9}$$

whenever it seems that the omission of the commas will not give rise to any confusion; and may call this form a *Quinary Symbol of the Point* P. But because (as above) only the ratios of the differences of the coefficients or coordinates are important, we may establish the following *Formula of Quinary Congruence*, between two *equivalent Symbols* of one *common point*,

$$(x'\,y'\,z'\,w'\,v') \equiv (x\,y\,z\,w\,v), \tag{10}$$

$$\text{if} \quad x'-v' : y'-v' : z'-v' : w'-v' = x-v : y-v : z-v : w-v; \tag{11}$$

reserving the *Quinary Equation*,

$$(x'\,y'\,z'\,w'\,v') = (x\,y\,z\,w\,v), \tag{12}$$

to imply the coexistence of the *five* separate and ordinary equations,

$$x' = x, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad w' = w, \quad v' = v. \tag{13}$$

We shall also adopt, as abridgments of notation, the formulæ,

$$t(x, y, z, w, v) = (tx, ty, tz, tw, tv); \tag{14}$$

$$(x' \dots v') \pm (x \dots v) = (x' \pm x, \dots v' \pm v); \tag{15}$$

and shall find it convenient to employ occasionally what may be called the *Quinary Unit Symbol*,

$$U = (1\,1\,1\,1\,1); \tag{16}$$

although *this* symbol represents *no determined point*, because both the denominator and numerator of the expression (8) vanish, by (2) and (4), when the five coefficients $x\,y\,z\,w\,v$ become each equal to unity.

[6.] With these notations, if Q and Q' be any *other* quinary symbols, and t and u any two coefficients, we shall have the congruence,

$$Q' \equiv Q, \quad \text{if} \quad Q' = tQ + uU; \tag{17}$$

the *two points* P and P′, which are denoted by these *two symbols*, in this case *coinciding*. Again the equation

$$Q'' = tQ + t'Q' + uU, \tag{18}$$

is found to express that Q, Q' Q'' are symbols of *three collinear points*; and the *complanarity of four points*, of which the symbols are Q, Q', Q'', Q''', is expressed by this other equation of the same form,

$$Q''' = tQ + t'Q' + t''Q'' + uU. \tag{19}$$

Es evidente que la notación empleada resulta ser un tanto densa y el mismo Hamilton parece asumir la necesidad de partir de elementos más simples, mismos que determina a partir de los iniciales.

A continuación, se muestra un fragmento donde se aborda el término de símbolo quinario de un plano determinado a partir de tres puntos dados.

[7.] If then a *variable point* P be thus *complanar* with *three given points*, P_0, P_1, P_2, its coordinates [4.] must be connected with theirs, by five equations of the form,

$$x = t_0x_0 + t_1x_1 + t_2x_2 + u; \quad \dots \quad v = t_0v_0 + t_1v_1 + t_2v_2 + u; \tag{20}$$

whence, by elimination of the four arbitrary coefficients $t_0\,t_1\,t_2\,u$, a *linear equation* is obtained, of the form

$$lx + my + nz + rw + sv = 0, \tag{21}$$

with the general relation

$$l + m + n + r + s = 0 \tag{22}$$

between its coefficients; and this equation (21) may be said to be the *Quinary Equation of the Plane* $P_0\,P_1\,P_2$. The five new coefficients $l\,m\,n\,r\,s$ may be called the *Quinary Coordinates of that Plane*; and the plane itself may be denoted by the *Quinary Symbol*,

$$\Pi = [l, m, n, r, s], \quad \text{or briefly,} \quad \Pi = [l\,m\,n\,r\,s], \tag{23}$$

when the commas can be omitted without confusion.

If $R, R', \ldots$ be symbols of this form, for planes $\Pi, \Pi', \ldots$, then the equation

$$R' = tR, \tag{24}$$

in which t is an arbitrary coefficient, expresses that the *two planes* Π, Π' *coincide*; the equation

$$R'' = tR + t'R' \tag{25}$$

expresses that the *three planes* Π, Π', Π'' are *collinear*, or that the *third* passes *through the line of intersection* of the *other two*; and the equation

$$R''' = tR + t'R' + t''R'' \tag{26}$$

expresses that the *four planes* Π, Π', Π'', Π''' are *compunctual* (or *concurrent*), or that the *fourth* passes *through the point of intersection* of the *other three*.

Sin embargo, el mismo Hamilton propone una simplificación al sugerir suprimir el quinto coeficiente del punto P, conduciendo de esta forma a los llamados cuaternarios:

If then we *suppress the fifth coefficient, v, in the quinary symbol* (9) *of a point* P, which comes to first substituting, as the congruence (10) permits, the differences $x-v$, $y-v$, $z-v$, $w-v$, and $v-v$ or 0, for x, y, z, w, and v, and then writing simply $x, \ldots w$ instead of $x-v, \ldots w-v$, and omitting the final zero, whereby the quinary symbol $(0\,0\,0\,0\,1)$ for the fifth given point E (27) becomes first $(-1,-1,-1,-1,0)$, or $(1\,1\,1\,1\,0)$, and then is reduced to the *quaternary unit symbol* $(1\,1\,1\,1)$, we shall *fall back on that system of anharmonic coordinates in space*, of which some account was given in a former communication* to this Academy: the *anharmonic* (or *quaternary*) *symbol of a plane* Π being, in like manner, *derived from the quinary symbol* (23), by simply *suppressing the fifth coefficient*, or coordinate, s. *Anharmonic coordinates*, whether for *point* or for *plane*, are therefore *included in quinary ones*; but although they have some advantages of *simplicity*, it appears that their *less perfect symmetry*, of reference to the *five given points* A … E, renders them less adapted to investigations respecting the *Geometrical Net in Space*, which is constructed with those *five* points as data: and that therefore they are less fit than *quinary* coordinates for the purposes of the present paper.

En otro fragmento, se considera una simplificación adicional al considerar trabajar únicamente con tres componentes de la coordenada quinaria y se empieza a considerar una terna, tal como se trabaja ahora.

[17.] We may also occasionally denote a point *in the given plane* of A, B, C by the *ternary symbol*,

$$(x, y, z), \quad \text{or} \quad (x\,y\,z), \tag{74}$$

considered here as an *abridgment* of the *quinary* symbol $(x\,y\,z\,0\,0)$; and the *right line* which is the *trace on that plane*, of any *other plane* Π, or $[l\,m\,n\,r\,s]$ (23) may be denoted by this *other ternary symbol*,

$$[l, m, n], \quad \text{or} \quad [l\,m\,n]; \tag{75}$$

these two last ternary symbols being *connected* by the relation,

$$lx + my + nz = 0, \tag{76}$$

if the *point* $(x\,y\,z)$ be *on the line* $[l\,m\,n]$. And the *point* P in which any *other* line Λ, *not* situated in the plane ABC, *intersects* that *plane*, may be said to be the *trace* of that *line*.

Y de modo más específico propone, propone dos puntos de vista respecto a la interpretación de la recta en el espacio, tal como puede apreciarse en el fragmento siguiente:

[21.] A *right Line* Λ *in Space* may be regarded in two principal views, as follows. Ist, it may be considered as the *locus of a variable point* P, *collinear with two given points* P_0, P_1; and in this view, the *symbol*

$$t_0(\mathrm{P}_0) + t_1(\mathrm{P}_1), \qquad \text{(comp. (72),)}$$

for the variable *point* upon the line, may be regarded as a *Local Symbol* (or *Point-Symbol*) *of the Line* Λ *itself*. Thus

$$(0\,t\,t'), \text{ or } (0\,y\,z), \qquad (99)$$

may either represent *an arbitrary point on the line* BC; or, *as a local symbol*, that *line itself*. Or IInd, we may consider a line Λ as a *hinge, round which a plane* Π *turns*, so as to be always *collinear* [7.] *with two given planes* Π_0, Π_1 through the line; and then a symbol of the form

$$t_0[\Pi_0] + t_1[\Pi_1], \qquad \text{(comp. (25),)}$$

which represents immediately the *variable plane* Π, may be regarded as being *also a Tangential Symbol* (or *Plane-Symbol*) *for the line* Λ. For example the line BC may be thus represented, not only by the *local* symbol (99), but also by the *tangential* symbol,

$$[\overline{\sigma}\,0\,0\,t\,u], \text{ if } \sigma = t + u, \text{ and } \overline{\sigma} = -\sigma. \qquad (100)$$

In fact, this last symbol can be derived, by linear combinations, from the symbols (94) for the two planes BCD, BCE, which intersect in the line BC; and if any particular value be assigned to the ratio $t : u$, a particular *plane through that line* results. But it is time to apply these general principles to the *Geometrical Net in Space*.

Figura 2

LECTURES

ON

QUATERNIONS:

CONTAINING A SYSTEMATIC STATEMENT

OF

A New Mathematical Method;

OF WHICH THE PRINCIPLES WERE COMMUNICATED IN 1843 TO

THE ROYAL IRISH ACADEMY;

AND WHICH HAS SINCE FORMED THE SUBJECT OF SUCCESSIVE COURSES OF LECTURES, DELIVERED IN 1848 AND SUBSEQUENT YEARS,

IN

THE HALLS OF TRINITY COLLEGE, DUBLIN:

WITH NUMEROUS ILLUSTRATIVE DIAGRAMS, AND WITH SOME GEOMETRICAL AND PHYSICAL APPLICATIONS.

BY

SIR WILLIAM ROWAN HAMILTON, LL. D., M. R. I. A.,

FELLOW OF THE AMERICAN SOCIETY OF ARTS AND SCIENCES; OF THE SOCIETY OF ARTS FOR SCOTLAND; OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY OF LONDON; AND OF THE ROYAL NORTHERN SOCIETY OF ANTIQUARIES AT COPENHAGEN; CORRESPONDING MEMBER OF THE INSTITUTE OF FRANCE; HONORARY OR CORRESPONDING MEMBER OF THE IMPERIAL OR ROYAL ACADEMIES OF ST. PETERSBURGH, BERLIN, AND TURIN; OF THE ROYAL SOCIETIES OF EDINBURGH AND DUBLIN; OF THE CAMBRIDGE PHILOSOPHICAL SOCIETY; THE NEW YORK HISTORICAL SOCIETY; THE SOCIETY OF NATURAL SCIENCES AT LAUSANNE; AND OF OTHER SCIENTIFIC SOCIETIES IN BRITISH AND FOREIGN COUNTRIES;

ANDREWS' PROFESSOR OF ASTRONOMY IN THE UNIVERSITY OF DUBLIN: AND ROYAL ASTRONOMER OF IRELAND.

DUBLIN:

HODGES AND SMITH, GRAFTON-STREET,

BOOKSELLERS TO THE UNIVERSITY.

LONDON: WHITTAKER & CO., AVE-MARIA LANE.

CAMBRIDGE: MACMILLAN & CO.

1853.

De modo que puede describir una recta en el espacio de dos formas a partir de dos puntos o como la intersección de dos planos. Bajo la primera interpretación podemos notar cómo los puntos datos, para los cuales consideremos sus vectores de posición, se ven afectados por un escalar para luego sumarlos. En la visión actual, si primero sumamos los vectores de posición obtenemos lo que denominamos como vector de dirección de la recta.

Después del descubrimiento de Hamilton, el matemático alemán Hermann Grassmann empezó a investigar los vectores. A pesar de su carácter abstracto, el físico estadounidense J. W. Gibbs encontró en el álgebra vectorial un sistema de gran utilidad para los físicos, del mismo modo que Hamilton había hecho con las cuaternas. La amplia influencia de este enfoque abstracto llevó a George Boole a escribir *Investigación sobre las leyes del pensamiento* (1854), un tratamiento algebraico de la lógica básica. Desde entonces, el álgebra moderna —también llamada álgebra abstracta— ha seguido evolucionando; se han obtenido resultados importantes y se le han encontrado aplicaciones en todas las ramas de las matemáticas y en muchas otras ciencias.

En 1874 Heaviside conoció el famoso libro *Tratado de electricidad y magnetismo* de Maxwell, y lo impresionó de tal forma que decidió renunciar a su trabajo y dedicarse completamente a su estudio. En 1918 Heaviside escribió sobre sus impresiones iniciales del Tratado de Maxwell y con el concepto de vector y las formas de manejarlo, Heaviside simplificó enormemente las ecuaciones de Maxwell. En Estados Unidos, John Willard Gibbs también empleó el concepto de vector, sin saber del trabajo de Heaviside. Las matemáticas que desarrolló éste se llaman hoy en día cálculo operacional. Por cierto, un dato curioso es que su trabajo sobre este tema no fue aceptado para su publicación en la revista de la Royal Institution por su "falta de rigor matemático".

Heaviside se dio cuenta de que tanto el campo magnético como el eléctrico se pueden describir como vectores y expresó las ecuaciones de Maxwell en términos de estos dos vectores. En su trabajo original presentó 20 ecuaciones en 20 variables. Con la reformulación de Heaviside, el panorama se iluminó como por encanto y las ecuaciones de Maxwell adquirieron sencillez, simetría y belleza notables. Como se mencionó en el capítulo XV, Hertz también simplificó las ecuaciones de Maxwell, y lo hizo casi al mismo tiempo que Heaviside. Hertz reconoció en su libro sobre electricidad: "El señor Heaviside tiene la prioridad."

En los libros de texto se incorporaron los vectores en la teoría de Maxwell, y es así como se trabaja con esta teoría hoy en día. En la actualidad, los estudiantes piensan que los vectores son obvios, sin embargo, hemos de mencionar que durante varios años hubo una gran disputa científica entre Heaviside y Gibbs por un lado, y el físico escocés Peter Guthrie Tait por el otro, sobre que concepto utilizar. Tait peleó por el uso de los cuaterniones y hubo agrias discusiones publicadas en la revista inglesa Nature. Al final, los vectores ganaron de manera tan contundente que en los libros de texto se dejó de hacer referencia a sus creadores. Asimismo, se usaron los vectores en otros campos de la física, como la mecánica. En la actualidad son un instrumento matemático cotidiano en el desarrollo de la física, la ingeniería, la química y las matemáticas.

En torno a la información presentada podemos encontrar que la evolución del concepto de vector se desarrolla en un lenguaje matemático cuya terminología poco adecuada dificulta la comprensión y el análisis. Además aunque sus orígenes estuvieron en un contexto físico y geométrico, los matemáticos hacen a un lado el aspecto geométrico; por considerarlo poco formal, y el aspecto físico; por considerarlo fuera de sus intereses. Así, llega hasta nosotros esta perspectiva a través de los libros de texto, los cuales tienen una fuerte influencia en el discurso matemático escolar. De tal razón que la propuesta pretende considerar el aspecto geométrico sobre el que se construirá el algebraico, de tal suerte que podamos posteriormente recorrer en sentido inverso, permitiendo al estudiante moverse en ambos sentidos.

- **DIMENSIÓN DIDÁCTICA**

Esta dimensión está asociada al funcionamiento del sistema de enseñanza y para ello rescatemos el hecho de que para los matemáticos vector es un elemento de una estructura algebraica llamada espacio vectorial, se entiende que esencialmente es un conjunto de números con un conjunto de axiomas que cada uno de los elementos del espacio debe de cumplir. Mientras que para los físicos, es un concepto que nos permite describir: la velocidad, la aceleración, la fuerza, etc. y lo representan por una flecha, para denotar su sentido (el de la flecha) su magnitud (la magnitud de la flecha) y el punto de donde parte. Para este tipo de vectores (generalmente bi o tridimensionales) se definen módulo, dirección y sentido. Esta diferencia de perspectiva se refleja en el aula al momento de la enseñanza de la ecuación vectorial de la recta, ya que como antecedente a éste tema se estudian los vectores y como matemáticos no se hace especial énfasis o referencia en el aspecto físico de modo que al tratar de mirar cómo se desplaza un punto por efectos de la operación de un vector por un escalar y la suma de vectores, para los alumnos el resultado es un conjunto de números, sobre los cuales nos interesa que sean mirados en el plano.

Por otro lado, según la forma de enseñanza más extendida, los profesores tienen alta tendencia a la exposición de los contenidos que el estudiante debe aprender a lo que éste último responde simplemente con la reproducción del trabajo del profesor, tal como puede constatarse en las conclusiones el capítulo anterior. Entonces, en la enseñanza de la ecuación vectorial de la recta, en lugar de partir de la ecuación y esperar que el alumno la interprete, puede resultar conveniente propiciar la construcción de la recta y llevarlos a la deducción de la ecuación.

Definitivamente, que la forma de proceder de los profesores está determinada por la referencia de los textos, tal como lo expresa (Cantoral, 2001) cuando expone que los textos escolares son medios adecuados para establecer consensos y mecanismos de reproducción social de ideas matemáticas. En particular, presentamos un análisis de libros de texto de entre los recomendados y empleados preferentemente al abordar el tema de la ecuación vectorial de la recta, tales como es el de Introducción al Análisis matemático cuyos autores son Hasser, La Salle y Sullivan y el libro de texto Geometría analítica de Solís, Nolasco y Victoria, elaborado como material de apoyo por la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Para cada uno de ellos se pondrá mucha atención a la presentación que hace cada autor respecto al concepto vector y posteriormente la ecuación vectorial de la recta, puesto que se pretende mirar los argumentos tanto geométricos como analíticos, el algebraico y el geométrico visual que ofrecen a estos conceptos matemáticos.

Adicionalmente, se pretende mirar como estos textos influyen y son empleados en el curso, particularmente en el estudio de la ecuación vectorial de la recta. Se analizarán las influencias que ejercen en los profesores, los enfoques preferidos por los autores, y dirigiremos la mirada hacia los objetivos planteados en el curso. Además, se trata de identificar los usos que se le dan a los textos, por parte de profesores y alumnos.

Por lo anterior, se decide analizar dos libros que utilizan los profesores como libros de apoyo y consulta para los estudiantes en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán.

ANÁLISIS DIDÁCTICO EN
Solís, R.; Nolasco, J.; Victoria, A. (1984). Geometría analítica. Universidad Nacional Autónoma de México. México.

Planos de análisis

a. Notas previas

Este libro fue editado en los años 1980´s con el objetivo de proporcionar a los estudiantes de ingeniería un libro de texto básico en el estudio de la geometría analítica, no sin invitándolos a profundizar en los libros recomendados en la bibliografía. Siendo así, el contenido que presenta, se apega sobre manera a los programas establecidos en la asignatura mencionada y que además viene a corresponder a las primeras unidades de la asignatura del mismo nombre en el plan de estudio de los estudiantes de licenciatura en la Facultad de Matemáticas.

El concepto de recta se estudia en el espacio y se presenta junto con el estudio de el plano en el capítulo II, posterior a la estudio de vectores y previo al estudio de ecuaciones paramétricas y ecuaciones en coordenadas polares. Observamos que el estudio previo de vectores resulta ser necesario para abordar el trabajo con la ecuación vectorial de la recta.

b. Ubicación

Capítulo II posterior a la presentación del álgebra vectorial.

Los capítulos de estudio son:

Capítulo I, Álgebra vectorial

Capítulo II, La recta y el plano en el espacio

- II.1 La recta
  - **II.1.1 Ecuación vectorial de la recta**
  - II.1.2 Ecuaciones paramétricas y en forma simétrica de la recta
  - II.1.3 Distancia de un punto a una recta
  - II.1.4 Ángulo entre dos rectas
  - II.1.5 Perpendicularidad, paralelismo y coincidencia
  - II.1.6 Distancia entre dos rectas
  - II.1.7 Intersección de dos rectas
  - II.1.8 Familias de rectas
- II.2 El plano
- II.3 Relaciones entre planos y rectas

Capítulo III, Ecuaciones paramétricas y ecuaciones en coordenadas polares

c. Antecedentes al tema

El concepto considerado como prerrequisito al estudio de la ecuación vectorial de la recta es el correspondiente a vector, y así lo consideran estos autores. Cabe señalar, que para éstos es de gran importancia la interpretación geométrica aunque se reconoce las posibilidades de generalizaciones mediante la representación algebraica. Además, la interpretación geométrica la asocian al fenómeno de desplazamiento en trayectoria recta de un cuerpo, lo cual resulta de suma importancia para efectos de interpretación de la ecuación vectorial de la recta. Esta interpretación de los vectores puede ser resultado del enfoque requerido por la Facultad de Ingeniería para el cual fue pensado este texto.

d. Perspectiva del concepto Vector

Los vectores se conciben inicialmente en el plano y luego en el espacio, esto es en 2 y 3 dimensiones, respectivamente. Pero parten de su representación geométrica y posteriormente se generalizan algebraicamente. A partir de este último tratamiento extienden el concepto de vector a espacios de n-dimensiones, para lo cual se hace repetidamente énfasis de que estos vectores ya no poseen representación geométrica.

e. Criterios para determinar la ecuación vectorial de la recta

Presentamos las interpretaciones que los autores dan a la ecuación vectorial de la recta, algunas de ellas son implícitas y otras explícitas.

1. Argumento Geométrico

Trata de una figura donde argumenta geométricamente el paralelismo entre la recta y el vector dirección y a partir del cual se desprende una relación algebraica de donde se puede obtener un conjunto infinito de puntos. A la relación algebraica la denomina ecuación paramétrica vectorial o simplemente ecuación vectorial de la recta

"Si el vector $\mathbf{p} - \mathbf{p_0}$ *es paralelo a* $\mathbf{u}$*, entonces por la condición de paralelismo entre vectores, existe un escalar* $t \in \Re$ *tal que* $\mathbf{p} - \mathbf{p_0} = t\mathbf{u}$*.*

Figura II.1

Si

$$p - p_0 = \mathbf{t}u$$

Entonces

$$p = p_0 + \mathbf{tu}"$$

(Solís, Nolasco, Victoria, 1984; pág. 62)

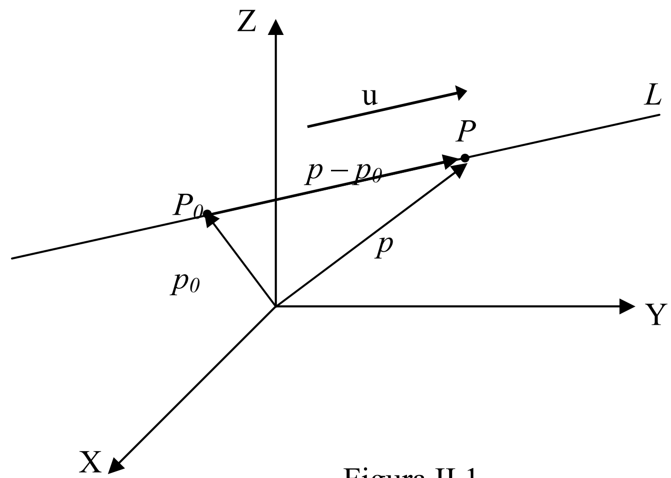


Figura II.1

2. Argumento Analítico

*La condición para que un punto P pertenezca a la recta L, está dada por $P \neq P_0$ pertenece a L si y sólo si P – P_0 es paralelo a **u** .*

(Solís, Nolasco, Victoria, 1984; pág. 62)

3. Argumento Algebraico (la definición)

Los autores definen a la ecuación vectorial de la recta de la manera siguiente:

*Sea un punto dado $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y sea u =(a, b, c) un vector dado tal que **u** $\neq$ 0.*

*Una recta es el conjunto de puntos P(x, y, z) tales que el vector de posición **p** de cualquiera de ellos se puede expresar como la suma del vector de posición $\mathbf{p_0}$ del punto P_0 más un vector paralelo al vector **u**.*

(Solís, Nolasco, Victoria, 1984; pág. 61)

4. Argumento Geométrico - Analítico

*Considerando que P_0 y **u** están fijos y que el escalar t, al que llamaré parámetro, puede tomar todos los valores de $\Re$; entonces se dice que la recta que contiene a P_0 y es paralela al vector **u**, es el conjunto de todos los puntos P para los cuales sus respectivos vectores de posición **p** satisfacen la expresión **p** = $\mathbf{p_0}$ + t**u**......figura II.1*

(Solís, Nolasco, Victoria, 1984; pág. 62)

f. Problemas propuestos

Los autores no proponen problemas en todo el texto, únicamente presentan ejemplos resueltos que van en distintos niveles, desde los elementales donde basta con identificar y sustituir datos hasta aquellos en los que se requiere la comprensión analítica para tratar de dar respuesta a lo presentado.

g. Notas finales

En la presentación de la ecuación vectorial de la recta se parte de la definición, haciendo referencia a que se trata de una aplicación del álgebra vectorial estudiada previamente. Y como en el tema anterior se considera importante la representación geométrica, en este caso también se recurre a este enfoque y del cual se hacen observaciones respecto a la caracterización los puntos pertenecientes a la recta en torno al vector de dirección.

Respecto al conjunto de puntos que pertenecen a la recta los autores hacen referencia implícitamente que se trata se un conjunto infinito cuando plantean que el parámetro puede tomar todos los valores de $\Re$.

ANÁLISIS DIDÁCTICO EN

Hasser, N.; La Salle, J.; Sullivan, J. (1990). Análisis Matemático. Curso de introducción. Ed. Trillas. México. Vol. 1.

Planos de análisis

a. Notas previas

Esta obra forma parte de la bibliografía recomendada en el curso y es uno de los libros más recurridos por los profesores para abordar la ecuación vectorial de la recta. Sin embargo, tal como lo plantean los autores, tiene el objetivo de presentar el análisis elemental como parte de la matemática y como herramienta de la ciencia, y está enfocado para estudios superiores en carreras de matemáticas, física e ingeniería entre otras. Se compone de dos volúmenes y su primera edición corresponde a 1970, aunque para efectos de este trabajo se consideró el análisis de la segunda edición de 1990. Los autores consideran el primer volumen de carácter fundamental mientras que la segunda presenta una generalización de la geometría plana y del cálculo de funciones reales de una variable real. Para efectos del análisis nos enfocamos únicamente al volumen I, ya que en él se considera el tema que es objeto de nuestro interés.

b. Ubicación

El estudio de la ecuación vectorial de la recta se encuentra en el *Capítulo 2*, en particular en el tema 9. El plano euclideano donde la intensión es describir un modelo analítico para éste, de modo tal que considera necesario el establecimiento de los conceptos de punto y recta, siendo el último concepto de nuestro interés. En este mismo capítulo se aborda el concepto de vector, el cual resulta importante para el tema que nos ocupa. Es importante señalar que el tema 11 hace referencia a la ecuación de la recta, pero se refiere a la ecuación normal de la recta y no la vectorial que nos interesa.

Ubicación del tema

Capítulo 1: Los números reales

Capítulo 2: Geometría analítica plana

1. Introducción
2. Coordenadas (cartesianas) rectangulares
3. Álgebra vectorial bidimensional
4. Representación geométrica de vectores
5. Paralelismo de vectores
6. Ortogonalidad de vectores
7. El producto escalar
8. Proyección ortogonal. Componentes
9. **El plano (analítico) euclideano**
10. Paralelismo de rectas
11. Ortogonalidad de rectas. Ecuación de una recta
12. Intersección de rectas. Ecuaciones lineales simultáneas
13. Pendiente
14. Resumen

Capítulo 3: Funciones

Capítulo 4: Transformaciones rígidas

Capítulo 5: Gráficas de ecuaciones

Capítulo 6. Trigonometría analítica

Capítulo 7. Inducción matemática

Capítulo 8. Límites y derivadas

Capítulo 9. El axioma del supremo

Capítulo 10. Aplicaciones de la derivada

Capítulo 11. Solución de ecuaciones

Capítulo 12. La integral definida

Capítulo 13. Aplicaciones de la integral definida

Capítulo 14. Funciones elementales

c. **Antecedentes al tema**

En este capítulo se estudian los vectores en el plano cartesiano y los consideran como un par ordenado de números reales. Al considerar las operaciones de suma y producto por un escalar se establecen como elementos de un espacio denominado espacio vectorial bidimensional.

d. Perspectiva del concepto Vector

El principal enfoque dado al concepto de vector mantiene de lado la interpretación geométrica y esto se observa al definir los pares ordenados los cuales forman un conjunto con las operaciones de suma y multiplicación por números reales.

En el estudio del término vectores se puede observar:

- Se hace referencia hacia la importancia de la ubicación de los componentes del vector, en lugar de decir cuando dos vectores son iguales.

> *Las coordenadas (x, y) son un "par ordenado" de números reales y sitúan un punto en el plano. Si meditamos un poco acerca de esta situación, veremos que hay en nuestra vida diaria muchos ejemplos de cosas completamente ordinarias –tales como la anotación en un juego de béisbol, una fecha 13/1/1956, las dimensiones de un refrigerador- que son especificadas por dos o más números reales donde el orden en que los números se dan es significativo. Tales cantidades se llaman cantidades "vectoriales" o, simplemente, "vectores".*
>
> (Hasser, La Salle, Sulivan, 1990; pág. 55)

- Se considera por igual a los términos vector y punto

> *Los elementos del espacio vectorial –los pares ordenados de números reales- se llaman vectores o puntos.*
>
> (Hasser, La Salle, Sulivan, 1990; pág. 57)

- Se trata como sección aparte la representación geométrica de los vectores a partir de la página 60 y se representa la suma y resta de vectores así como la multiplicación por un escalar.

- Hace una diferencia entre los términos punto y vector cuando plasman:

... en las aplicaciones de los espacios vectoriales a la geometría y a la física ha de hacerse una distinción real entre puntos y vectores... En geometría, cuando llamamos a un elemento (x, y) $\in V_2$ un "punto" y escribimos P=(x, y), tenemos en mente la construcción geométrica (figura 8) cuyas coordenadas rectangulares son (x, y). Cuando llamamos a un elemento a = $(a_1, a_2) \in V_2$ un vector, lo representamos con una flecha ...

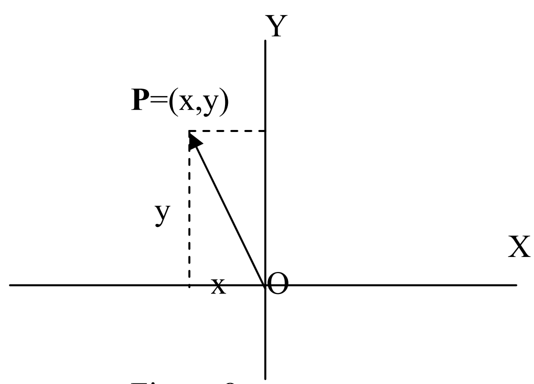


Figura 8

(Hasser, La Salle, Sulivan, 1990; pág. 63)

- Se hace referencia a las aplicaciones de los vectores en el campo de la física como cantidades que tienen magnitud y dirección y da algunos ejemplos.

La proposición "va 5 millas a SE" define una cantidad vectorial a y se llama "desplazamiento". El número 5 es la magnitud del desplazamiento a y SE es su dirección... Otros ejemplos de cantidades vectoriales son la velocidad, la fuerza, la aceleración y el momento.

(Hasser, La Salle, Sulivan, 1990; pág. 65)

e. Criterios para determinar la ecuación vectorial de la recta

1. Argumento Geométrico

Trata de caracterizar los puntos de una recta a partir de un vector cuya dirección es paralela a la recta.

*Los puntos P sobre la recta L que pasa por P0 en la dirección de **a** son todos puntos de la forma P = P0 + t**a** donde t es un número real.*

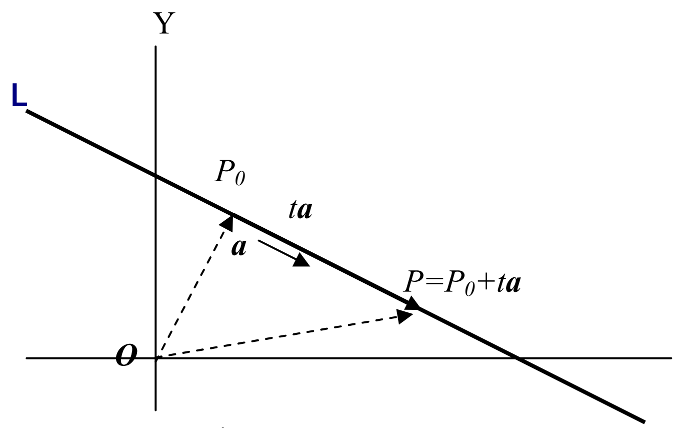


Figura 34

(Hasser, La Salle, Sulivan, 1990; pág. 89)

2. Argumento Algebraico (la definición)

Los autores definen la recta en términos de un conjunto

Un conjunto L de puntos de $\Re^2$ se llama recta si hay un punto $P_0 = (x_0, y_0) \in \Re^2$ y un vector no nulo $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in V_2$ tales que

$$L = \{P_0 + t\mathbf{a} \,/ t \in \Re\}$$

*La recta L que acabamos de definir se llama **recta que pasa por el punto P0 paralela al vector (no nulo) a**.*

(Hasser, La Salle, Sulivan, 1990; pág. 90)

3. Argumento Analítico

Así como resulta posible caracterizar los puntos que pertenecen a una recta, también resulta conveniente poder determinar cuando un punto pertenece a la recta, esto lo plasman los autores en el teorema siguiente

*Teorema. Si L es la recta que pasa por P_0 es paralela a **a**, entonces un punto P de $\Re^2$ está sobre L si y sólo si P – P_0 es paralelo a **a**.*

(Hasser, La Salle, Sulivan, 1990; pág. 90)

4. Argumento Geométrico – Analítico

Exponen otra interpretación de los puntos que forman la recta haciendo referencia a elementos de una figura.

*La definición de la recta L paralela a **a** que pasa por P_0 nos dice que un punto P está sobre L si y sólo si el vector de P_0 a P es paralelo a **a** (figura 34)*

(Hasser, La Salle, Sulivan, 1990; pág. 90)

f. Problemas propuestos

Los problemas, relacionados con la ecuación vectorial de la recta, presentados en este tema deben considerarse como ejercicios ya que se trata de reproducir casos ejemplificados.

Por otro lado, a pesar de tratar de dar una representación analítica a la recta, en los ejemplos se recurre a las gráficas y en los problemas se recomienda presentar los resultados gráficamente.

Adicionalmente, se refleja un gran énfasis en la comprensión de la representación analítica de la recta como un conjunto de puntos y en los problemas se plasma esta visión cuando una vez definidas una serie de 10 rectas se pide a los estudiantes que demuestren por ejemplo:

a) $L_1 = L_2$

c) $L_8 \neq L_9$

e) $L_1 \quad L_3 = \{(½ , ½)\}$

f) $L_1 \quad L_4 = ø$*, el conjunto nulo*

(Hasser, La Salle, Sulivan, 1990; pág. 94)

g. Notas finales

El estudio de los vectores de forma analítica separado de su representación geométrica, muestra la importancia que tiene para los autores el segundo enfoque. Sin embargo, al abordar el concepto de recta se recurre a la representación gráfica al hacer referencia que la recta es paralela al vector dirección.

BREVES CONCLUSIONES SOBRE EL ANÁLISIS DIDÁCTICO

De los libros de texto analizados existe una diferencia de enfoque en torno al aspecto algebraico y el geométrico. En el segundo libro analizado (Introducción al Análisis Matemático) se observa una preferencia del aspecto algebraico sobre el geométrico, mientras que el primero (Geometría analítica) trata de llevar de la mano ambos enfoques. Esta situación se hace evidente en el estudio presentado de los vectores y considerando los objetivos del curso en torno a este concepto, se espera que *el alumno sea capaz de realizar las operaciones usuales de vectores y* ***de interpretar gráficamente los resultados***; de tal suerte que la estrategia que elija el profesor para abordar estas ideas contribuirá en las interpretaciones de los estudiantes.

Además, aunque en ambos libros de texto se hace referencia a las cantidades vectoriales y su utilidad en la Física, se hace un énfasis distinto en la idea de mirar el concepto de vector como el desplazamiento o trayectoria recta, o simplemente como puntos en el plano; lo que trae como consecuencia que en el primer caso podamos ver a la recta como el desplazamiento de un punto paralelo a un vector dada o como un conjunto de puntos caracterizados por ser paralelo a un vector dado.

Aunque los textos presentados se diseñaron con una intención distinta, uno como apoyo y herramienta elemental en el estudio de los temas que aborda, otro con el objetivo a de introducir al estudiante al análisis matemático. Esta diferencia se hace muy evidente en el lenguaje empleado y el nivel de abstracción que requiere del lector. Más aún, el denominado Geometría analítica podría recomendarse al estudiante como notas del curso mientras que el llamado Introducción al análisis matemático resulta como apoyo básicamente del profesor. Además, al pensar en la organización y planeación del curso, el primero resulta más adecuado en tanto que el segundo tiene que se tomado por segmentos, dado que el primero fue diseñado con la intención del curso mientras que el segundo no.

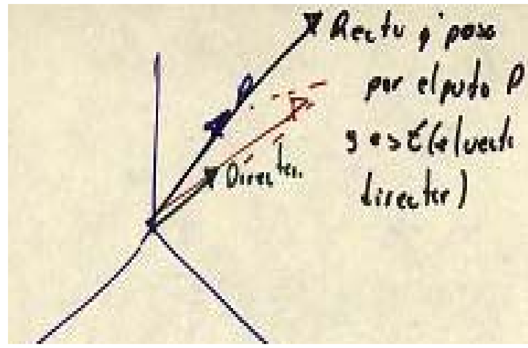
En cuando a la perspectiva y lo que se espera que el estudiante ponga en juego en la resolución de problemas, en ambos casos se convierten en reproducciones de ejemplos presentados y por consiguiente esto lleva a un tratamiento casi algorítmico para el cual basta que el estudiante recuerde la el procedimiento a seguir ante cierta situación, con lo cual no garantizamos la comprensión del tema. Y nuevamente se observa la fuerte influencia que ejercen los libros de texto en los profesores, ya que la perspectiva observada en ambos libros analizados, son reproducidos por el profesor llevando a los estudiantes procedimientos mecánicos ajenos a una interpretación y comprensión del mismo.

Por lo anterior, se concluye que los libros de texto resulta en muchas ocasiones ejes orientadores sobre el enfoque del curso; aun cuando el libro no corresponda a los objetivos del curso y resulte ser únicamente como fuente de consulta o problemario cuando establece los procedimientos mecánicos que debe dominar el estudiante. Ante esto, el profesor debe realizar un trabajo de análisis y juicio previo de los libros de texto sobre todo aquellos que recomendarán a los estudiantes ya que éstos deben corresponder en lenguaje y nivel de los conocimientos acorde con la audiencia a quien lo estamos dirigiendo. Además, debe considerar que los libros de texto son herramientas de apoyo y orientación para los temas por tratar y no por ello tiene que reproducirse en el aula.

- **DIMENSIÓN COGNITIVA**

En la dimensión cognitiva se consideran las características cognitivas de los estudiantes, esto es, las concepciones, dificultades y obstáculos que deben enfrentar para apropiarse de las nociones puestas en juego. En este trabajo se desarrolla esta dimensión en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 3. ESTUDIO COGNITIVO



Atendiendo a la dimensión cognitiva que considera la ingeniería didáctica, desarrollamos este capítulo. Empezaremos dando una breve explicación respecto a lo que se entiende por estudio cognitivo para luego abordar la forma en que se llevó a cabo el análisis.

La cognición trata sobre el pensamiento humano en su acción por conocer. La investigación cognitiva busca desentrañar y comprender la mente humana. Estos estudios tienen una fundamentación empírica, se dispone de datos sobre los procesos mentales con los que después se elaboran explicaciones que permiten una cierta comprensión teórica de los fenómenos del pensamiento.

El problema de la investigación cognitiva radica en que su objeto de estudio, los fenómenos mentales, no es susceptible de observación pública. Es posible observar los productos externos de la mente como el lenguaje, la memoria, las representaciones o el razonamiento, pero no así los procesos mediante los cuales éstos ocurren. De ahí que se necesite inferir sobre datos poco fiables como la observación instrospectiva o a partir de datos de naturaleza conductual, los que sin duda tendrán una fuerte dosis de circunstancialidad. Sin embargo, a diferencia del asociacionismo clásico, los acercamientos cognitivos cuando se abocan a manipular estímulos y a registrar respuestas, admiten una gran variedad de estructuras, representaciones, estrategias y procesos mentales que configuran un verdadero sistema cognitivo.

Por ejemplo, la investigación cognitiva en cálculo (Cantoral, (1993)) busca proveer de tanta información empírica como sea posible sobre aspectos propios del aprendizaje del cálculo, particularmente busca explicar la naturaleza de las dificultades de los que aprenden. El problema central consiste en localizar las dificultades para entender las causas y explorar posibles tratamientos. En este trabajo, de manera similar, se pretende localizar dificultades que presentan los estudiantes ante el estudio de la ecuación vectorial de la recta.

Para efectos de este estudio se considera aplicar un cuestionario a un grupo de estudiantes y entrevistar algunos de ellos, procedimientos que se describen en los siguientes apartados.

3.1 EL CUESTIONARIO

Se aplicó un cuestionario para tratar de identificar las concepciones sobre ciertos aspectos relacionados con e concepto de recta y el concepto vector. Dicho cuestionario y la metodología aplicada, se describe a continuación; así como los resultados que se obtuvieron.

- ***CONSIDERACIONES METODOLÓGICAS***

LOS ESTUDIANTES

Se aplicó un cuestionario a 28 estudiantes de primer semestre en la Facultad de Matemáticas. El grupo estaba integrado por estudiantes de tres diferentes licenciaturas entre los cuales tenemos 10 que corresponden a Actuaría, 9 de Enseñanza de las Matemáticas y 9 de Matemáticas.

Las edades de los estudiantes fluctúan entre 18 y 23 años. En sus estudios de bachillerato llevaron cursos obligatorios de Geometría plana, Geometría analítica y Precálculo con duración de un semestre cada uno. Este antecedente resulta una base para el resultado del análisis de las concepciones que tienen respecto al concepto de recta, dado que en cada uno de los cursos, mencionados anteriormente, se estudia con diferente enfoque.

EL ESPACIO FÍSICO

La aplicación del cuestionario se realizó en el aula en que acostumbran trabajar y en el horario del curso de Geometría analítica.

FORMA DE APLICACIÓN

El cuestionario se aplicó en el mismo semestre en que cursaban la asignatura Geometría analítica y específicamente para el momento de la aplicación ya habían estudiado el tema donde se aborda la ecuación vectorial de la recta.

Las preguntas se plantearon por escrito y se proporcionó papel para que dieran sus respuestas.

- **OBJETIVOS**

Considerando que los conocimientos previos y las concepciones que poseen los estudiantes son las bases sobre las cuales se construye un nuevo conocimiento, se diseñó un cuestionario con los objetivos siguientes:

Objetivo general:

- Explorar los significados y las concepciones que los estudiantes tienen respecto a la idea de recta y las interpretaciones asociadas al concepto vector, para caracterizarlos e identificar aquellas concepciones que no favorecen la construcción de la ecuación vectorial de la recta.

Objetivos específicos:

- Identificar el nivel de interpretación la línea recta considerando
    - Ámbito geométrico: De la Geometría plana como un conjunto de puntos.
    - Ámbito algebraico: De la Geometría analítica como un conjunto de puntos en el plano.
    - Ámbito analítico: Del precálculo como una función que representa una razón de cambio constante.
- Identificar cómo es que los estudiantes vinculan los significados geométricos con los algebraicos y los geométricos con los analíticos, respecto a la idea de recta y vector.
- Identificar las concepciones que conllevan a dificultades en la construcción de la ecuación vectorial de la recta.

El resultado de estos objetivos fue un cuestionario integrado por ocho preguntas, mismas que se analizan a continuación.

1. ¿Qué es para ti una recta? ¿podrías considerar un ejemplo?

En esta pregunta se pretende identificar las ideas asociadas a la recta y básicamente identificar si se apega a definiciones escolares y/o recurre a la idea geométrica. En este caso pudiera ocurrir que el estudiante:

- Proporcione la definición de recta abordada en geometría plana o geometría analítica o precálculo
- Realice un dibujo

2. ¿Cómo es una recta?

En esta pregunta la intención es identificar las cualidades que cada estudiante la atribuye a la recta, entre las cuales podemos mencionar sobre lo infinita, la inclinación que posee, la colección de puntos que la forman.

Para contestar a esta pregunta se esperaría que realice un dibujo o bien trate de reportar con sus palabras la definición de recta

3. ¿Encuentras objetos en los que podamos "ver" una recta o que podamos decir que representa una recta?

Se trata de hacer evidentes los distintos objetos del entorno, objetos reales que evocan a una recta. Esta idea se maneja en geometría plana, donde se hace referencia al borde de una hoja, la intersección de dos planos como los representados por los lados de una caja o de dos paredes de una habitación, entre otros ejemplos.

4. ¿Qué expresiones pueden representar una recta?

Entre las respuestas podríamos encontrar:

- Geométrico (dibujar una recta o hacer referencia a la anterior)
- La simbología empleada en geometría plana: notación $\overline{AB}$, ***AB***, $\overleftrightarrow{l}$, *L*
- La simbología empleada en geometría analítica: como una ecuación

  Ecuación punto pendiente: $y - y_0 = m(x - x_0)$

  Ecuación pendiente-ordenada al origen: $y = mx + b$

  Ecuación simétrica: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$, donde (a, 0) y (0, b) son puntos de la recta

  Ecuación general: $Ax + By + C = 0$
- La simbología empleada en precálculo o cálculo: como función $f(x) = mx + b$

Para los que ya llevaron el curso de Geometría Analítica y del Espacio, podrían incluir:

- La ecuación vectorial de la recta $\mathbf{P} = \{ P_1 + \lambda\, \mathbf{a} \mid \lambda \in \Re \}$
- Las ecuaciones paramétricas $L : \begin{array}{l} x = x_1 + \lambda a_1 \\ y = y_1 + \lambda a_2 \\ z = z_1 + \lambda a_3 \end{array}$

- La ecuación simétrica $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3}$

5. Describe algún fenómeno o situación en cuya representación se utilice una recta.

En este caso se pretende indagar si efectivamente puede entender una recta como una función que permita representar situaciones reales.

6. ¿Con qué otros conceptos asocias la idea de recta?

Entre otros esperaríamos que haga referencia a conceptos como:
DIFERENTES TIPOS DE LÍNEAS: rectas, curvas, quebradas, mixtas
POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS: cortarse (perpendiculares o no), paralelas, coincidentes
RAYO, SEGMENTO DE RECTA, LADOS DE POLÍGONOS, LÍNEAS ESPECIALES EN UN TRIÁNGULO, LÍNEAS ESPECIALES EN UN CÍRCULO (secantes, tangentes).
RECTA EN UN PLANO CARTESIANO, POSICIÓN DE LA LÍNEA (vertical, horizontal, inclinada), PENDIENTE DE UNA RECTA, DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA, LONGITUD DE UN SEGMENTO DE RECTA.
TANGENTE A UNA CURVA, RAZÓN DE CAMBIO CONSTANTE, VECTOR DE DIRECCIÓN

7. ¿Qué es un vector?

Esta pregunta pretende indagar cómo se ha construido en los estudiantes el concepto vector, si es que predomina una idea geométrica o la idea numérica como sería una pareja ordenada (en el caso del plano).

8. ¿Qué podemos representar con los vectores?

Los ejemplos que proporcionen darán las ideas que asocian a los vectores y se caracterizarán para poder identificar las ideas predominantes.

- ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS AL CUESTIONARIO

A continuación se presenta cada una de las preguntas incluidas en el cuestionario y se muestran las respuestas más comunes.

1. ***¿Qué es para ti una recta?***

Respuestas más comunes	*TOTAL*
1. Sucesión de puntos	13
2. Distancia entre dos puntos	11
3. Lugar geométrico	1
4. Segmento con una misma pendiente	1
5. Comportamiento	2

Tabla 3

Examinemos algunas respuestas a esta pregunta, las respuestas englobadas en (1) parecen provenir de la geometría plana cuando se presenta el término indefinido de recta, aunque en algunos casos se hace explícito de considerar la sucesión de puntos como infinita y en otros casos no, por lo que habría que investigar en aquellos estudiantes que no manifiestan esta situación, cómo es que consideran a la recta ¿finita o infinita? Veamos algunos casos

"Es una sucesión infinita de puntos alineados"

"Es una sucesión de puntos"

"Es un conjunto de puntos alineados en una misma dirección"

La línea se considera como término indefinido en la geometría plana y varios postulados hacen referencia a la recta:

- Postulado: Dos puntos determinan una recta, o sea por dos puntos pasa una recta y sólo una.
- Postulado: El camino más corto entre dos puntos es la recta que los une.

Tal parece que producen una fuerte influencia en las respuestas de los estudiantes, cuando dan las interpretaciones siguientes:

"Es la unión de dos puntos"

"Es la distancia más corta que hay entre dos puntos"

Entre las respuestas dadas dos de ellas describen a la recta en términos de la geometría analítica al hablar de lugar geométrico y del hacer referencia a la pendiente:

"Es un lugar geométrico que corta distintos puntos en la misma dirección"

"Un segmento de puntos que están unidos en una misma dirección"

“Es un segmento de puntos que tienen la misma pendiente”

En el último grupo de respuestas se consideraron aquellas que representan ideas vistas en los cursos de Precálculo, enfocadas al comportamiento de ciertas situaciones que producen una recta en su representación gráfica

“La visualización grafica de un comportamiento”

“Es una forma gráfica de representar un cambio, cuando x aumenta y aumenta”

Observemos que la respuesta (1 y 2) está dada en términos de la Geometría plana mientras que la (3 y 4) correspondería a la Geometría analítica y únicamente la respuesta (5) es una visión desde los cursos de Precálculo y por lo tanto podemos decir que la idea de recta que tienen los estudiantes predomina el contenido de la geometría plana estudiado en cursos anteriores.

2. ¿Cómo es una recta?

Las respuestas más comunes fueron:

1. Sin curvas	9
2. Serie de puntos	5
3. Con dirección	4
4. Horizontal, vertical	3
5. Derecha o rígida	2
6. Infinita	2
7. Une dos puntos	2
8. Presenta un dibujo	1

Tabla 4

Podemos observar que a esta pregunta obtenemos una mayor diversidad de respuestas, predominando la idea de que la recta no tiene curvas y que es una serie de puntos.

Haciendo algunas caracterizaciones a estas repuestas podemos agruparlas de la siguiente manera:

- Hace referencia a la pendiente: (1), (3), (4) y (5)
- Mira a la recta como un conjunto finito de puntos: (2) y (7)
- Mira a la recta como un conjunto infinito de puntos (6)

La idea de ver a la recta como un conjunto finito de puntos la encontramos en respuestas como las siguientes:

“Es una línea la cual une 2 o más puntos y está cuantificada”

“Son varios puntos que siguen una misma trayectoria, pero están tan unidos que no hay espacio entre ellos”

Particularmente en el caso de la respuesta (8) donde el estudiante presenta un dibujo, pareció tener dificultades para describirla y por tal razón responde “así es una recta (dibujo), es que no busco palabras para describirla”.

3. ***¿Encuentras objetos en los que podamos “ver” una recta o que podamos decir que representa una recta?***

Para esta pregunta los estudiantes no encuentran ninguna dificultad para responder haciendo referencia a objetos que se encontraban en el lugar (lápiz, borde del pizarrón, columnas del edificio, orilla de la libreta, regla) como otros que ellos conocen (carreteras, postes de luz).

4. ***¿Qué expresiones pueden representar una recta?***

Esta pregunta causó alguna confusión puesto que algunos estudiantes responden a la pregunta ¿Qué expresiones puede representar una recta? Pero aquellos que responden son 15 y la respuesta es en términos de una ecuación, ya sea dando un caso particular, la ecuación general de la recta o bien diciendo explícitamente la expresión ecuaciones de primer grado.

1. Ecuaciones	15
2. Alguna aplicación	9
3. Expresiones de geometría plana	1
4. Dibujo	1
5. No contestaron	2

Tabla 5

Una de las respuestas catalogada entre las de tipo (1) Ecuaciones, es interesante ya que el estudiante hace referencia a la ecuación general de la recta pero explicita el término polígono, lo cual estaría mostrando la falta de significado del término polígono:

“Algebraicamente hablando un polígono de la forma $ax + by + c = 0$”

5. ***Describe algún fenómeno o situación en cuya representación se utilice una recta.***

	Act	*Ens*	*Mat*	Total

1.	Aplicación financiera	*3*	*2*	2	7
2.	Trayectoria	*1*	*1*	5	7
3.	Velocidad	*1*	*4*		5
4.	Distancia	*3*		*1*	4
5.	Construcciones	*1*			1
6.	Delimitar el paso		*1*		1
7.	Asíntota			*1*	1
8.	Recta numérica			*1*	1
9.	No contestó	*1*			1

Tabla 6

Las respuestas (1), (2), (3) y (4) pueden ser resultado de sus cursos de Precálculo donde se hacía referencia a la recta como función de alguna situación. Aunque la respuesta (4) también puede ser el resultado de la interpretación de la recta como un segmento, o sea, un conjunto finito que puede medirse.

Las respuestas (5) y (6) muestran que la idea de recta está presente en la vida del escolar cuando recurre a ella para el bosquejo de construcciones o bien cuando responde:

> "situación en la que sucede algún acontecimiento en el cual se le niega el acceso apersonas ajenas a ese lugar: "No cruce la línea"

Las respuestas (7) y (8) quedan únicamente como resultado de la instrucción escolar en el que se recurre a la recta para explicar algún concepto, y cabe señalar el caso particular de mirar a la asíntota como una recta que es uno de los problemas del discurso escolar ya que no es la única forma de asíntota que se puede dar.

6. ¿Con qué otros conceptos asocias la idea de recta?

Como se esperaba, esta pregunta tiene gran variedad de respuestas que se clasificaron en cuatro grupos que se muestran en la tabla 7.

La idea de asociar línea con recta, puede estar reforzado por la geometría plana ya que en ella se estudia a la línea como una sucesión de puntos y la clasifican en recta, curva, quebrada y mixta. Algunos libros hacen explícito el hecho de utilizar la palabra línea para representar una "línea recta" y en otros al presentar el término indefinido de línea mencionan que la más notable es la línea recta y a partir de entonces empieza a emplear el término recta.

Las respuestas en las cuales no se encuentra mucho significado están clasificadas en el apartado (4) Otros.

(1) Conceptos asociados con Geometría plana	**(2) Conceptos asociados con Geometría analítica**	**(3) Conceptos asociados con Precálculo**
punto	vectores	interés simple
segmento	dirección, distancia, sentido	tiempo
línea	ecuaciones	
cuerdas	plano cartesiano	
formas geométricas	trayectoria	
perpendicular	pendiente	**(4) Otros**
alturas, mediatrices, bisectrices	ángulo entre dos rectas	ecuador
paralelismo	punto medio	universo, espacio
	punto de intersección	abreviación de palabras

Tabla 7

7. *¿Qué es un vector?*

Las respuestas dadas a esta pregunta las clasificamos en cinco grupos: (1) apegada a la definición (17 estudiantes), (2) aquellas definiciones y no hacen referencia a los tres componentes del vector, (3) las presentadas como una idea geométrica, (4) como una interpretación o aplicación de los vectores y (5) otros. El primer grupo será omitido del análisis y haremos algunas observaciones para los otros tres.

(2) Respuestas dadas en términos de la definición pero no se hizo referencia a los tres componentes:

i. Es una recta o un segmento que sigue una dirección, módulo
ii. Es un segmento dirigido
iii. Es una flecha con magnitud y una dirección, formados por una recta y dos extremos
iv. Es una recta la cual indica un sentido y una magnitud
v. Una recta en un plano cartesiano que tiene varios componentes

En la respuesta (i) podemos interpretar que el estudiante considera que recta es lo mismo que segmento, situación que se confirma cuando al responder a la pregunta 6. ¿Con qué otros conceptos asocias la idea de recta? Responde: Línea.

(3) La respuesta dada parece estar en términos de cómo lo ven los vectores, es decir, la idea geométrica que tienen.

i. Es una línea $\nearrow$ que va desde un punto llamémoslo P y finaliza en un punto O
ii. Es una recta dirigida hacia algún punto, es decir que tiene un sentido
iii. Es una recta que inicia desde un punto
iv. Es un punto dado en un plano cartesiano en el cual se da un punto y se traza una recta de dicho punto al origen
v. Es una semirrecta que sale de un punto (0,0) en caso de que sea de dos dimensiones y (0,0,0) si es de 3 dimensiones

Algunos puntos que podrían indagarse en estas respuestas son:

(i) el punto O al que se refiere ¿es necesariamente el origen o está haciendo referencia a cualquier otro punto?

(ii) La recta a la que se refiere ¿tiene magnitud?

(iii) La recta ¿tiene magnitud? ¿tiene dirección? ¿tiene sentido?

(iv)¿Todos los vectores se dirigen al origen del plano cartesiano?

(v) ¿Todos los vectores tienen su origen en el origen del plano cartesiano?

(4) Únicamente dos estudiantes responden en términos de que puede representar un vector, aunque uno de ellos no menciona específicamente que puede representar ya que lo responde en la pregunta 8.

i. Es una representación gráfica de algún movimiento, por eso tiene sentido, dirección y magnitud
ii. Una recta que utilizamos para representar algo

(5) Este es el último grupo únicamente tenemos una respuesta, pero parece no tener muy claro el concepto de vector.

i. Son un conjunto de rectas que a veces parten del origen

8. ¿Qué podemos representar con los vectores?

La mayoría de los estudiantes dan respuesta a esta pregunta y únicamente dos de ellos no. Entre las respuestas dadas tenemos las siguientes:

Dirección, distancia
Fuerza, trabajo
Velocidad
Peso
Trayectorias
Inclinación
Masa
Figuras geométricas

Breves conclusiones

La idea que tienen los estudiantes respecto al concepto de recta parece provenir de los cursos de geometría plana y se enfocan en la característica de no poseer curvas. Aunque se considera que la recta está conformada por una serie de puntos parece no tener importancia el aspecto de conjunto infinito.

La idea de recta parece ser común en la vida diaria y no presentan dificultades para dar ejemplos de objetos que representan una recta, e inclusive al solicitar fenómenos o situaciones en cuya representación se utilice la recta la mayoría hace referencia sobre ***aplicaciones financieras***, ***trayectoria de algún móvil***, ***velocidad y distancia***.

Sin embargo, en relación al concepto de vector la mayoría de los estudiantes se apegan a la definición vista en el curso de geometría analítica, así como los ejemplos propuestos a este concepto.

Por lo anterior, se concluye que parece existir algunas dificultades con la interpretación la recta como un conjunto infinito de puntos y no logra interpretarse esto a en la ecuación vectorial de la recta. De tal forma que proponemos profundizar en las concepciones de los estudiantes respecto a la ecuación vectorial de la recta con la intención de identificar modelos que no favorecen a su estudio y cuyos resultados se presentan en la sección siguiente.

3.2 LA ENTREVISTA

Con el objetivo de profundizar en las concepciones que tienen los estudiantes respecto a la ecuación vectorial de la recta, se propone realizar entrevistas, para identificar aquellos modelos mentales que pudieran estar presentes en los estudiantes y que se relacionen con la ecuación vectorial de la recta. Iniciaremos discutiendo algunos elementos teóricos respecto a la cognición, particularmente acerca de la intuición y de los modelos intuitivos; aspecto central y en que se basará esta investigación.

Fischbein (1989) afirma que en la matemática, y en la ciencia en general, existen dos tipos de conocimientos o cogniciones: los intuitivos y los lógicos. Los primeros son aquellos *auto-evidentes* mientras que los segundos están basados en una serie de pasos y que proporcionan una prueba indirecta.

El conocimiento intuitivo se encuentra presente en el conocimiento matemático, y en general, del conocimiento científico que el alumno va adquiriendo, ha adquirido y sigue adquiriendo durante su vida.

Según Fischbein (citado en Molina (2004)), las características de un conocimiento intuitivo son:

Evidentes. Es la característica principal del conocimiento intuitivo y permite al individuo aceptar un conocimiento sin la necesidad de validación o argumentación para ello. Por ejemplo, si tenemos un vaso lleno de agua no se necesitan explicaciones para convencer a otra persona que si se voltea el vaso, el agua se tirará.

Certeza intrínseca. Son nociones que se apoyan en la experiencia del individuo. Tal es el caso de situaciones no evidentes pero que se aceptan después de una demostración. Por ejemplo, si le preguntas a una persona común, qué ocurrirá con una bolsa de nylon llena de agua, si ésta se coloca sobre un comal en una estufa y posteriormente se enciende; probablemente esta persona responda que la bolsa se quemará rápidamente y el agua se derramará. Sin embargo, al hacer el experimento, la experiencia le puede mostrar que la bolsa no se romperá y que el agua puede llegar a hervir antes de que la bolsa se dañe. Este conocimiento no es evidente (al menos para una persona común), sin embargo será una noción aceptada debido a su experiencia.

Perseverancia. Es el rasgo que permite al conocimiento intuitivo influir en nuestro pensamiento aún después de un grado avanzado de educación formal. Por ejemplo, cuando el individuo considera correcta la expresión $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ aún después de un curso de álgebra.

Coercitivo. Las intuiciones se imponen y no es desplazado por un conocimiento que le resulte contrario. Este rasgo es fundamental y tiene un gran peso sobre nuestro razonamiento y sobre los conocimientos que se adquieren de manera racional. Por ejemplo, la noción de que la suma “añade” y la resta “quita” es una idea que permanece en los estudiantes aun en el bachillerato. La presencia de esta noción podría obstaculizar al estudiante entender la convergencia de series, a un estudiante con este modelo le resultaría inaceptable que se puedan sumar términos infinitamente y que el resultado sea finito.

Estatus de teoría. La intuición aunque surge de una información particular, se eleva a una estatus de generalidad. Este rasgo es lo que permite al individuo plantear una conjetura. Por ejemplo, cierto profesor de matemáticas cuando aborda el tema transformaciones lineales utiliza representaciones geométricas y muestra a sus estudiantes el efecto de aplicar diversas transformaciones lineales a un vector, un ejemplo:

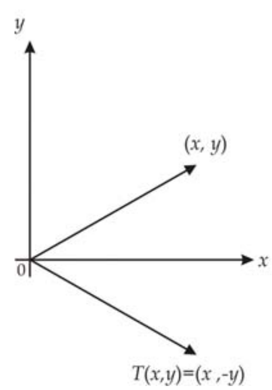


Figura 6

$T(x,y)$ representa la imagen bajo una transformación del vector (x,y)

Esta situación podría llevar al estudiante a concluir que la imagen de un vector (x,y) bajo cierta transformación se puede determinar multiplicando las componentes del vector (x,y) por escalares (en este caso, multiplicar la componente y por -1), al momento de que el estudiante obtiene esta conclusión, ésta se vuelve una noción intuitiva con estatus de teoría.

Extrapolación. Este rasgo es el que lleva una intuición más allá de un dominio, más allá del soporte empírico. Por ejemplo, cuando se enseña al estudiante la simplificación de la multiplicación $\frac{ab}{ac}=\frac{b}{c}$ y éste en la suma propone como correcta la expresión $\frac{x+y}{x+z}=\frac{y}{z}$.

Globalidad. Las intuiciones son representaciones globales o interpretaciones. Se presenta el ejemplo de un niño a quien se le presentan dos hileras de canicas. Aunque poseen diferente cantidad de canicas, ambas hileras son de la misma longitud y al preguntarle al niño que compare el número de canicas se guía por la representación de longitud captada visualmente y responde que son iguales ignorando el número de canicas.

Implícitas. Este rasgo se refiere a las nociones que poseen los sujetos de modo inconsciente. El siguiente ejemplo fue tomado de Fischbein (1989), ilustra cómo influye una noción implícita en el razonamiento de profesores:

> Linchevski y Vinner (1988) han analizado un número de concepciones erróneas que tienen profesores de primaria concernientes al concepto matemático de conjunto. Ellos han identificado las siguientes concepciones erróneas: (1) Los sujetos consideran que los elementos de un conjunto deben poseer una cierta propiedad explícita común. (2) Un conjunto debe estar compuesto por más de un elemento. Las ideas de conjunto vacío o de conjunto con un solo elemento no son aceptadas. (3) Los elementos repetidos son considerados como elementos distintos. (4) Un elemento de un conjunto no puede ser elemento de otro conjunto. (5) A estos quizás debemos añadir una quinta concepción errónea común, es decir, que dos conjuntos son iguales si ellos contienen el mismo número de elementos…

Una interpretación muy simple puede tomar en cuenta todas estas concepciones erróneas. Si el modelo que tienen en mente cuando se considera el concepto de conjunto es una colección de objetos, todas estas concepciones erróneas son previsibles… (Fischbein, 1989, p. 10, nuestra traducción).

Fischbein considera que en todo nivel de razonamiento matemático se deben tomar en cuenta tres aspectos básicos:

- *El aspecto formal*, expresado principalmente a través de la estructura lógico-deductiva de la Matemática (axiomas, definiciones, teoremas, demostraciones, etcétera).
- *El aspecto algorítmico*, o *procedural*, que atañe a los procedimientos, es decir, es el representado por los procedimientos de transformación y solución.
- *El aspecto intuitivo*, que se refiere al grado de aceptación subjetiva de los conceptos o afirmaciones matemáticas como una cosa evidente o cierta.

Fischbein señala que no estamos equipados para manipular conceptos u operaciones y tenemos que recurrir al empleo de modelos que nos ayuden a interpretar alguna situación e inclusive tienden a sustituir un concepto complejo.

> El problema principal de la psicología es que nosotros no estamos equipados naturalmente para manipular conceptos y operaciones…. Consecuentemente, producimos modelos los cuales confieren algo funcional, práctico, unificado y significado a estos símbolos. Más aún, como hemos dicho, estos modelos tienden a reemplazar el original… (Fischbein, 1989, p. 9, nuestra traducción)

Los modelos mentales, en el sentido de Fischbein, (1989), son herramientas que empleamos para dar forma a las cogniciones intuitivamente aceptables.

Según Fischbein (1987), los modelos pueden clasificarse en intuitivos o abstractos; externos o mentales; tácitos o explícitos; analógicos o paradigmáticos; primitivos o elaborado. De los cuales presentamos la descripción de aquellos implicados en este estudio

- "Modelos abstractos, modelos intuitivos"

  Los modelos abstractos son representantes de cierta realidad y que es empleado para predecir ciertos eventos. Los modelos intuitivos son de tipo sensorial aunque no implica una reflexión de la realidad.
  Podemos decir que las expresiones matemáticas y las empleadas para representar fenómenos físicos resultan ser modelos abstractos en tanto que aquellas ideas que generamos en nuestro interior en función de la percepción sensorial resultarán modelos intuitivos.

- "Modelos explícitos, modelos implícitos (tácitos)"

  Los modelos explícitos se construyen conscientemente para facilitar conseguir una solución y los modelos implícitos resultan no ser conscientes pero tienen una gran influencia en el individuo que los posee, un ejemplo de este tipo de modelos es pensar en los conjuntos como una colección de objetos, ver el ejemplo de Linchevski y Vinner, mencionado anteriormente.

Las características de los modelos mentales implícitos según Fischbein (1989):

a) Los modelos son 'entidades estructurales', no están aislados, son interpretaciones globales, unitarias y significativas de un fenómeno o un concepto. Un modelo implica normalmente un 'grupo' de reglas, de coacciones. Esta es la característica fundamental de los modelos.

b) Un modelo tiene una naturaleza concreta, práctica y con referencia al comportamiento del sujeto, y sin embargo es un constructo abstracto.
c) Los modelos son simples y elementales, incluso casi triviales. Precisamente por esta característica toman el papel privilegiado que tienen.
d) Los modelos tienen la capacidad de imponer limitaciones o contrastes. Por ejemplo, la operación de la resta está representada por la acción de quitarle a una colección de objetos una cantidad de ellos; sin embargo, el minuendo debe ser mayor que los otros dos números, el sustraendo debe ser menor que el minuendo y la diferencia debe ser menor que el sustraendo y, claro está, que el minuendo. O bien, cuando se pide a los estudiantes calcular la raíz cuadrada de dos, hay quienes dicen que no tiene.
e) Los modelos son entidades 'autónomas', con reglas propias y no cuyos comportamientos dependen de límites externos.
f) Es fundamental su carácter de robustez, su capacidad de sobrevivir por largo tiempo aun cuando no correspondan al conocimiento formal adquirido. Un ejemplo muy común de este hecho es que los alumnos de educación superior siguen cometiendo los mismos errores que alumnos más jóvenes, y esto se puede explicar porque usan los mismos modelos implícitos, a pesar de los años de asistencia a la escuela.

Los modelos explícitos resultan una forma de expresar situaciones y que pueden ser compartidas con otros, mientras que los modelos implícitos no pueden ser observables directamente, a pesar de la gran influencia que ejercen; y por ello resultan de gran interés para nuestro estudio y se pretende identificar este tipo de modelos en el pensamiento de los estudiantes en torno la ecuación vectorial de la recta. Se pretende la identificación de este tipo de modelos analizando sus respuestas a un cuestionario y a una entrevista, la cual discutiremos en este apartado.

A continuación procederemos a describir la entrevista realizada a los estudiantes participantes en este trabajo en tanto la cuestión operativa y las características de los estudiantes así como el análisis a priori respecto a las preguntas que se considerarán en la entrevista.

- ACERCA DE LA ENTREVISTA

La entrevista se aplicó de manera individual y previamente sólo se les informó que se trata del tema de la ecuación vectorial de la recta. Físicamente, la entrevista se llevó a cabo en un cubículo privado de la Facultad de Matemáticas, asignado al investigador, y se grabaron por medio de cámara de video y grabadora de audio.

- ACERCA DE LOS ESTUDIANTES

Se eligieron a tres estudiantes que habían contestado el cuestionario aplicado, y cuyas respuestas se caracterizaron en un caso, por apegarse a las definiciones escolares; otro por dar respuestas enfocadas o aterrizadas a situaciones cotidianas y el último cuyas respuestas fueron muy breves.

Los nombres de los entrevistados fueron Adrián, Damián y Lidia; y sus edades se encuentran entre 18 y 19 años. Estaban cursando el segundo semestre de licenciatura, dos de ellos en matemáticas y uno en enseñanza de las matemáticas. Para este momento ya habían terminado el curso de geometría analítica, donde estudiaron la ecuación vectorial de la recta, y habían acreditado dicho curso, más aún tales estudiantes obtuvieron calificaciones aprobatorias en la prueba escrita que incluía el tema de nuestro interés.

- ANÁLISIS A PRIORI

En este apartado se comentan los propósitos de las preguntas consideradas en la entrevista, así como las posibles respuestas que los estudiantes pudieran ofrecer.

La entrevista cuestiona sobre elementos que definen la ecuación vectorial de la recta

$$P = \{P_0 + \lambda\, \mathbf{a} \mid \lambda \in \Re\}$$

La intención era identificar si los estudiantes interpretan a P como un conjunto de puntos, y observar las ideas en torno a dicho conjunto. La interpretación de P como un conjunto infinito de puntos radica en el escalar λ, dado que toma infinitos valores del conjunto de números reales. Ante esta situación, podría ocurrir que los estudiantes consideraran al conjunto P como finito, tal como se reflejó en el cuestionario aplicado al grupo, por ejemplo cuando definen a la recta como la distancia entre dos puntos.

Por otro lado, se desea averiguar si el estudiante conoce qué efectos tiene el vector dirección **a** sobre la recta y rescatar si lo mira necesariamente como parte de ésta.

Además, respecto a los elementos que integran el conjunto P, dado que está representado por la suma de dos elementos “un punto” y “un vector afectado por un escalar”. Específicamente se pretende rescatar si los estudiantes asocian el radio vector o vector de posición correspondiente al punto P_0 para sumarse con el vector dirección.

Para indagar sobre lo anterior, se consideraron una serie de preguntas sobre las cuales giraron las entrevistas. Dichas preguntas se presentaron de acuerdo a la información que proporcionaba cada estudiante, de tal modo que éstas no se presentaron en el mismo orden para cada entrevista.

Las preguntas consideradas fueron las siguientes:

I. ¿Cuál es la ecuación vectorial de la recta?

Con esta pregunta se pretende averiguar qué ideas tienen los alumnos acerca de la ecuación vectorial de la recta, la cual como hemos comentado fue vista en el curso.

Según la referencia proporcionada por el profesor del grupo, en el curso se estudió la ecuación vectorial de la recta en función de los números directores de la misma:

$$(a, b, c) = (x_1, y_1, z_1) + t\,(a_1, a_2, a_3),\ t \in \Re \ldots\ldots\ldots\ldots. \text{(I)}$$

En tanto que tenemos la forma como un conjunto de puntos

$$P = \{P_0 + \lambda\, \mathbf{a} \mid \lambda \in \Re\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(II)}$$

Ante esta pregunta se espera que los estudiantes respondan utilizando la forma (I) como la ecuación vectorial de la recta; dado que fue la vista en el curso. Las posibles respuestas las clasificaremos de dos maneras:

1. Que escriba correctamente la ecuación vectorial, de lo cual sólo podemos concluir, por el momento, que lo recuerda; pero dependiendo de otras preguntas trataremos de concluir si realmente comprende la expresión.
2. Que no escriba correctamente la ecuación vectorial o que no pueda escribir nada y exprese que no recuerda, lo que nos llevaría a que su aprendizaje fue memorístico ya que en el curso aprobó el examen correspondiente y pasado el tiempo en el cual no emplea el conocimiento tiende a olvidarlo. Por otra parte según Fischbein (1989):

> …**El estudiante tiende a olvidar las propiedades formales y tiende a mantener en mente aquellas impuestas por un modelo intuitivo**. La explicación parece ser muy simple: las propiedades impuestas por el modelo concreto constituyen una estructura coherente, mientras las propiedades formales, aparecen, al menos a primera vista, más bien como una colección arbitraria (Fischbein, 1989, p.10, nuestra traducción y énfasis).

En el segundo caso se procedería a proporcionar la ecuación vectorial de la recta en la forma (II) y sobre la cual se trabajaría la entrevista.

Las siguientes preguntas tienen la intención de identificar si los estudiantes comprenden cómo participan los elementos de la ecuación vectorial de la recta.

II. ¿Qué es el vector dirección?

En esta pregunta esperamos que se responda correctamente ya que se trata de un elemento importante de la recta, sin embargo existen concepciones que podemos favorecer cuando estudiamos la ecuación vectorial de la recta a partir de dos puntos dados. Por ejemplo, dado los puntos A y B por donde pasa la recta, un vector dirección de dicha recta lo podemos obtener con la diferencia de los vectores de posición ***a*** y ***b***, de los puntos correspondientes.

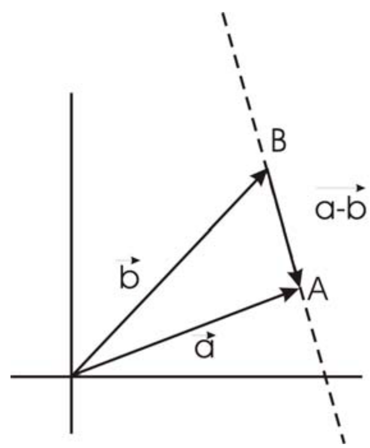


Figura 7

De esta forma dicho vector necesariamente es parte de la recta y por lo tanto podemos favorecer en los estudiantes dicha noción.

Las respuestas esperadas son:

1. Que responda que es el vector que da dirección a la recta, en este caso le pediríamos un ejemplo de un vector cualquiera y le pediríamos que nos de una recta en esa dirección.
2. Que no responda, esto nos llevaría a que no recuerda o no entendió el concepto. Para determinar cual es la situación se le explicaría que es el vector dirección y se le pediría un ejemplo gráfico para saber si lo entendió y en su caso lo recordó.

III. *¿Qué papel juega lambda en la ecuación vectorial de la recta?*

Esta pregunta intenta indagar si el estudiante comprende el efecto que produce el escalar sobre el vector dirección, situación que no debe presentar grandes dificultades ya que en los primeros temas del curso al estudiar vectores se considera la multiplicación de un vector por un escalar, lo cual se ve analítica y geométricamente. Las respuestas esperadas son:

1. Que responda que el escalar puede afectar tanto a la magnitud como al sentido del vector.
2. Que responda que el vector dirección es afectado en su magnitud ignorando la situación del efecto en el sentido. Esta idea puede estar influida, ya que en la vida cotidiana los números que manejamos son positivos, los días del mes, las horas, los años, etc., por esta razón el estudiante podría tender a pensar en números positivos. Esta noción tiene rasgos intuitivos, en el sentido de Fischbein, dado que es producida en función de las necesidades del ser humano de contabilizar sus posesiones, el tiempo, misma que se formaliza en las matemáticas.

IV. *¿Se puede sumar un vector con un punto?*

El objetivo de esta pregunta es identificar si el estudiante asocia que a cada punto del plano se le asocia un radio vector o vector de posición. Entre las respuestas que puede dar el estudiante podemos esperar:

1. Que efectivamente asocie los puntos del plano con su radio vector o vector de posición y por ende interpretar que al asociar un punto a un vector entonces un vector puede asociarse a un punto. De tal forma que al operar el punto P_0 con el vector dirección **a** el resultado se interpreta como un punto.
2. Que no pueda responder, en este caso el investigador tendrá que intervenir para tratar de hacerlo reflexionar y que explique con sus palabras. Esta situación puede interpretarse como que no recuerda o no le asocia significado y por ello no contesta.
3. Que responda que no, posiblemente influenciados por la idea de sumar únicamente elementos semejantes. las nociones asociadas a los puntos y vectores, ya que éstos últimos poseen magnitud y los primeros no.

V. *¿Entonces se trata de un conjunto finito o infinito?*

Con esta pregunta se intenta identificar si el estudiante interpreta que se obtendrá un número infinito de puntos, ya que el escalar λ tomará todos los valores reales para afectar al vector dirección **a.** De tal modo que al sumar un conjunto infinito de vectores con el mismo radio vector del punto P_0 entonces obtenemos infinitos puntos. Las respuestas esperadas son:

1. Que no tome en consideración que el escalar λ toma infinitos valores y por consiguiente no asocie la relación con el conjunto infinito de puntos que se estarían generando.
2. Que efectivamente interprete el escalar λ como infinitos valores pero no considere al conjunto P como infinito.
3. Que no pueda responder ya que no le asocia significado alguno.

- ANALISIS A POSTERIORI

A continuación presentamos lo ocurrido en las entrevistas realizadas a cada uno de los estudiantes y finalmente presentamos algunas conclusiones a partir del análisis de sus respuestas.

EL CASO DE DAMIAN

De la entrevista a Damián las respuestas dadas a las preguntas que se consideraban nos reporta lo siguiente:

PREGUNTAS I Y II

¿Cuál es la ecuación vectorial de la recta?
¿Qué es el vector dirección?

Damián sí recuerda la ecuación vectorial de la recta, en la forma (I) vista en su curso. Reconoce el efecto que tiene el escalar sobre el vector dirección y que éste vector es quien da orientación a la recta.

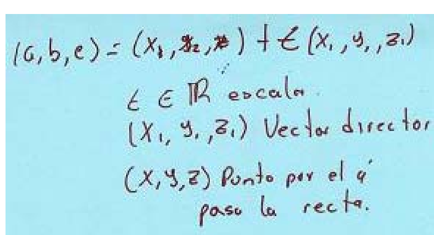


Imagen 1

A pesar que Damián tiene conocimiento sobre los elementos principales sobre los cuales se genera la ecuación vectorial de la recta, aparecen algunas limitaciones y contradicciones como son:

El vector dirección tiene orientación hacia el punto sobre el cual pasa la recta

> *D34*: ***El vector director se supone que está dirigido en la misma dirección del punto*** *para que pase por ese punto*
>
> *E35: ¿El vector dirección pasa por el punto?*
>
> *D36: Ajá […] tiene que pasar por el punto*

Esta concepción no le permite obtener una recta bajo las siguientes condiciones:

> *E71: Si consideramos este punto y este vector, ¿se podrá trazar una recta con estos dos?*

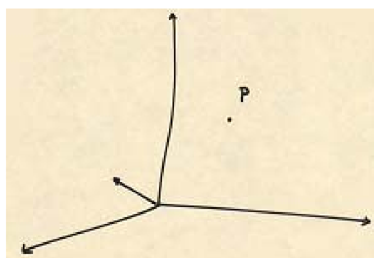


Imagen 2

> *D72: Que vaya, que tenga la dirección […]* ***pues no porque […] podríamos trazar una recta que tenga la dirección del vector director pero no pasaría por el punto***

Tal parece que el estudiante ha construido un modelo intuitivo en el cual la recta necesariamente pasa por el vector dirección, lo que en otras palabras se puede interpretar que para el estudiante el vector dirección es parte de la recta y no se trata únicamente de un elemento de referencia para los ángulos de inclinación que debe tener la recta.

PREGUNTA III

¿Qué papel juega lambda en la ecuación vectorial de la recta?

El escalar hace crecer el vector dirección

D14: Lo que pasa, esta recta va a ser, o sea, el vector director puede ser […] no sabes de qué tamaño va a ser, entonces esa recta va a ser el vector director que mayormente es mas pequeña entonces la va a multiplicar, o sea va hacerla crecer digamos a ese vector
E15: ¿Puedes mostrarlo gráficamente?
D16: Por ejemplo, si […] este puede ser un vector, el vector v […] pero si lo multiplicamos t veces por un escalar, como que se va a ser mas grande el vector

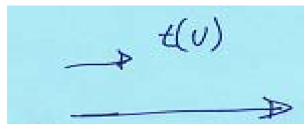


Imagen 3

D60: Pues con un punto por el cual va a pasar la recta y un vector director que nos va a dar dirección de la recta […] y pues ***el director pues es más pequeño***

Ante la respuesta dada por el estudiante, observamos dos nociones. La primera es considerar cualquier vector dirección como un vector pequeño, posiblemente tenga en mente al vector unitario, sobre el cual se aplicarán un conjunto de escalares. La segunda noción se refiere a los escalares, donde se interpretan como números positivos de tal forma que el vector se dirige en la misma dirección, esta afirmación es con base en lo discutido en D16, donde explica que el escalar expande al vector.

PREGUNTA IV

¿Se puede sumar un vector con un punto?

No se hace evidente la relación que existe entre cualquier punto en el espacio y su vector de posición, lo cual permite efectuar la suma entre el punto donde pasa la recta y el vector dirección mediante el método del paralelogramo.

E79: Y, ¿éste punto lo puedo sumar con éste vector?
D80: O sea, sus componentes […] si estamos hablando de sus componentes sí, podemos multiplicar por las operaciones que conocemos nosotros en vectores pues primero multiplica el escalar por cada componente y luego cada componente se suma, por ejemplo sería x más x_1 t coma y_2 más yt, o sea sus componentes son las que se pueden sumar. ***Un punto más un vector, pues no***

Podría deberse a que el punto es interpretado como un vector de magnitud cero y por lo tanto al sumarse con otro vector no nulo, el resultado sería éste último. O bien puede manifestarse la noción sobre suma en la cual no se puede efectuar la operación con elementos distintos. Esta operación, sumar un punto con un vector puede causar dificultades en los estudiantes cuando trabajan con la ecuación vectorial de la recta, posiblemente debido a las nociones intuitivas asociadas al vector y al punto (el vector se representa con segmentos de recta, y tienen una magnitud, por otra parte se dice que el punto no tiene magnitud). Las dificultades comentadas podrían manifestarse en forma de automatismos, los estudiantes realizan las operaciones, aún cuando haya elementos que no comprenden.

PREGUNTA V

¿Entonces se trata de un conjunto finito o infinito?

En relación a nuestra pregunta sobre la cardinalidad del conjunto que define la ecuación vectorial de la recta, encontramos algunas respuestas de Damián en las cuales se genera una contradicción entre la idea de recta finita o infinita.

E57: La recta dirías que ¿pasa por el origen?
D58: ***Parte del origen***
..

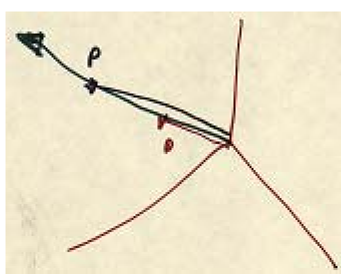


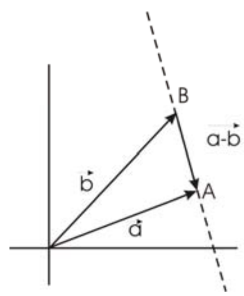
Imagen 4

E65: Acá de me dices que t es un escalar que afecta al vector director, t ¿cuántos valores puede tomar?
D66: Infinidad de, cualquier valor
E67: ¿Eso afectaría a la recta?
D68: ***Sí pues en su magnitud…*** *sería, es más grande, mas corta la recta […] a ver […] no de hecho […] afectaría en el sentido de que tendría que pasar por un punto pero la recta se*

puede […] se puede continuar indefinitiva o sea al infinito, pues o sea no hay un límite pues para esa recta solo que pase por ese punto y esa dirección. Entonces puede tomar cualquier valor […] lo que sí pide es que pase por ese punto y que vaya en esa dirección

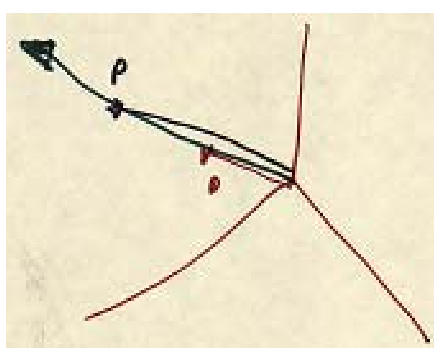
Un rasgo en el modelo que presenta el estudiante muestra que la recta tiene un origen, lo cual restringe la concepción de la recta como infinita. Más aún, la recta pasa por el origen del sistema de referencia, limitándose únicamente a una familia de rectas.

En resumen, las concepciones de Damián sobre la construcción de la recta a partir de un punto y un vector dirección están limitadas al caso de considerar el vector dirección como parte de la recta. Esta situación puede estar asociada a la forma de estudiar la recta a partir de dos puntos, donde se construye al vector dirección mediante la diferencia de los vectores de posición de los puntos dados.



Damián parece haber generado un modelo geométrico en el cual el vector dirección parte del origen y considerando que éste vector es parte de la recta, resulta que las rectas que se generen también pasen por el origen.

Para Damián, el vector dirección y el punto donde pasa la recta están en la misma dirección. Esta situación técnicamente deja sin efecto o sin importancia el punto del cual se habla ya que sería suficiente con disponer del vector dirección para dar la recta.



EL CASO DE ADRIAN

PREGUNTAS I Y II

¿Cuál es la ecuación vectorial de la recta?
¿Qué es el vector dirección?

Adrián dice no recordar la ecuación vectorial de la recta, pero parte de la ecuación de la recta en dos dimensiones la cual generaliza a tres llegando a la ecuación del plano, la cual acepta como la ecuación de la recta en tres dimensiones.

> *A10: Sí, era Ax más By no me acuerdo la letra de este coeficiente pero tenia un término en z, no sé creo que era F, D no me acuerdo muy bien, pero no importa y el término independiente le podemos llamar C y ya representaba una recta en el eje x, y y z*

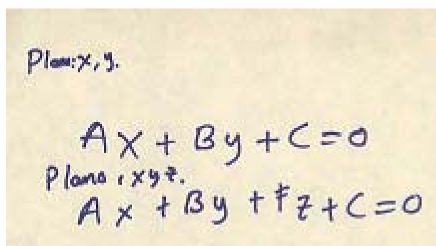


Imagen 5

> *E11: ¿Esta es la ecuación de la recta en tres dimensiones?*
> *A12: En el plano xyz*

Inclusive, se muestra una concepción equivocada al considerar un sistema bidimensional y tridimensional. Parece no tener clara la diferencia entre R^2 y R^3. Tal parece que se está presentando la característica de los modelos mentales que hace referencia al *estatus de teoría*, ya que la situación de la ecuación de la recta en dos dimensiones $Ax + By + C = 0$, la generaliza y plantea que $Ax + By + Fz + C = 0$ corresponde a la ecuación de la recta en tres dimensiones.

> *A4: Sí claro, por supuesto, me acuerdo que para* ***dos planos, o sea un plano xy****, sin la coma claro, sería de la forma Ax + By + C = 0 y donde representaba una recta en el plano coordenado xy*

> *E21: Esto ¿lo podemos expresar en un plano xy, en dos dimensiones?*

A22: Si, z estaría por aquí

Cuando se le solicita la ecuación vectorial de la recta, manifiesta no recordarla por lo cual se le presenta la forma (II) y acepta que efectivamente se trataba de la ecuación que no podía recordar:

E13: Y cuando te pido la ecuación vectorial de la recta, ¿es la que acabas de escribir?
*A14: Eh, **no me acuerdo** muy bien, pero me imagino que sí. Pero vimos varias definiciones de ecuaciones vectoriales de la recta igual distancia de un plano y que si dos planos igual se intersecan su corte es la recta. Tal vez **si repaso** un poquito sí **me puedo acordar**, pero sí también había otra, no porque había otra, sí **ya me acordé** era una donde había con diferencia de puntos pero no es ésta.*
E15: Dirías que esta expresión ¿es la ecuación vectorial de la recta?

$$P = \{P_0 + \lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Imagen 6

A16: Si, es ésta
E17: Así tal cual la viste en tu curso o ¿viste alguna forma parecida?
A18: Vimos varias formas, pero en definitiva esta es la primordial de la ecuación vectorial de la recta

A pesar de manifestar que esa es la ecuación vectorial de la recta, parece no reconocerla al comentar que P es un conjunto de rectas y parece simplemente leer la expresión tratando de dar sentido por medio de recordar lo visto en el curso, sin mencionar al vector dirección. Situación que se repite en varios momentos

A20: ¿Esta expresión? Bueno pues lo que veo acá es que esto parece un conjunto, un conjunto de ecuaciones vectoriales de recta, que por ejemplo esta P_0 creo que es la diferencia de los puntos de valor absoluto no me acuerdo muy bien, pero el caso es que la lambda es como una constante pero puede ser cualquiera que pertenece a los reales y a no me acuerdo muy bien qué era, pero sí es como varias […] varios conjuntos de recta que llevan una misma línea o algo por el estilo pero es un bloque de ecuaciones vectoriales de recta.

Sin embargo, parece manifestarse el recuerdo de un elemento que se obtenía a partir de la diferencia de dos puntos. Esto se debe a la forma de obtener el vector dirección a partir de dos puntos por los cuales pasa la recta.

A32: Esto es, yo me acuerdo, bueno de lo que recuerdo este […] ***esto es la diferencia de puntos*** *este es el punto director no me acuerdo muy bien, este puede tomar cualquier valor y este creo que era un punto o un punto de la recta o un punto específico de la recta algo así*

E37: ¿Recuerdas el término vector dirección?
A38: Si, el que, el que, creo ese es que ***se sacaba con la diferencia de los puntos****. De un punto y era el que tenia dirección del vector*

PREGUNTA III

¿Qué papel juega lambda en la ecuación vectorial de la recta?

Al parecer Adrián se sujeta a la terminología escolar,

E45: ¿Qué le está haciendo lambda a ese vector?
A46: Mmj […] lo está […] haciendo ***que se proyecte*** *[…] hasta que tenga un cierto espacio más, por ejemplo si está por acá, no sé, que tenga un, por más de sentido por acá o hacia acá*

Al pedir interpretar la ecuación vectorial de la recta proporcionada, Adrián sustituye todos los elementos por casos particulares; aunque se pretendía que particularice un punto y un vector dirección dado que el escalar λ debe tomar infinitos valores como son los números reales.

E49: Que me des un caso particular un ejemplo de esta expresión
A50: … Si P_0 *yo le doy un punto en xy, o sea 1,2,3 sería sustituir sus valores que yo sustituya un punto en tres direcciones y … un coseno director especifico, o sea dado, y* ***lambda una constante -1*** *por ejemplo y así formaría la ecuación, es lo que me está dando a entender*

Además, a pesar de contar con un punto y un vector, Adrián no pudo dibujar la recta considerando estos elementos

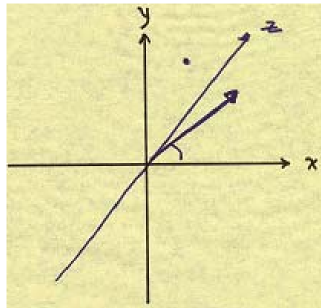


Imagen 7

E58: Con este punto y este vector ¿podemos trazar una recta?

A59: […] Yo creo que sí

E60: ¿Cómo sería, suponiendo que este vector es el vector dirección y que este punto es P_0?

A61: […]

E66: Entonces, ¿cómo debería ser la recta?

A67: Una recta hacia allá

E68: Dibújalo, ¿cómo sería?

*A69: Es que **no me acuerdo bien si pasaba por el punto, o no sé realmente no me acuerdo**. No se si se prolongaba o este punto necesariamente tendría que pasar por la recta, pero en definitiva […] no, no me acuerdo. Lo que pasa es que este punto no me queda claro, porque este es el coseno director entonces este le da dirección a la recta entonces si yo lo pongo en esta orientación entonces debe tener esta orientación pero no me acordaba si este punto tenía una relación, sí obviamente tiene relación pero no me acuerdo si se prolongaba de maneja perpendicular o paralela no me acuerdo, […] ok es que había muchas definiciones porque si era paralelas por ejemplo un punto paralelo a este y que su diferencia era esta pues era una recta paralela al vector. Cosas de ese estilo*

La mayoría de las respuestas dadas hasta este momento, hacen pensar que el aprendizaje de Adrián ha sido de tipo memorístico y que pasado el tiempo no puede recordar la información aprendida.

PREGUNTA IV

¿Se puede sumar un vector con un punto?

Al cuestionarle sobre la posibilidad de sumar un punto con un vector, responde que sí es posible dado que se le proporcionó una expresión donde se encuentra esta situación

E72: ¿Cómo puedo hacer esta suma? ¿Es posible sumar un punto y un vector?
A73: Si, o sea creo que esa es la ecuación, porque esto es un punto, pero este es un punto de la recta […] y la suma creo que es esto y esto es la proyección del coseno director y si yo lo sumo creo que me va a dar la ecuación vectorial de la recta

Lo cual interpretamos que los contenidos enseñados se aceptan tal cual, no son cuestionados; pero observamos que en el caso particular de la ecuación vectorial de la recta no se logró comprender.

PREGUNTA V

¿Entonces se trata de un conjunto finito o infinito?

Adrián interpreta la ecuación vectorial de la recta como un conjunto infinito de rectas, no visualiza el conjunto de puntos que definen a una recta.

E74: Retomando, al principio comentaste que esto es un conjunto. Podrías decir si el conjunto ¿es finito o infinito?
*A75: ¿Es finito o infinito? […] **Pues es una ecuación general debe ser infinito**, yo que imagino que si, aunque no he escuchado que, bueno en geometría analítica, había un montón de ecuaciones vectoriales de la recta, habían paralelas perpendiculares pero nunca llegamos a escuchar en geometría analítica que esto sea finito*

Es importante señalar que en esta pregunta no se identificó a P como un conjunto de puntos, de tal forma que Adrián la interpreta como la ecuación general de la recta y por lo tanto considera que serán infinitas rectas las que pueden obtener.

En resumen, Adrián parece apegarse a la terminología escolar y trata de repetir las producciones del profesor quedando al margen una comprensión de los conocimientos que se espera domine, lo cual lleva a un aprendizaje memorístico que no perdura. En torno a la ecuación vectorial de la recta únicamente podemos referir la característica de estatus de teoría que presenta al generalizar la ecuación de la recta en un plano a espacio, donde por resultado que interpreta la ecuación del plano como la ecuación de la recta.

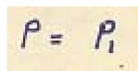
EL CASO DE LIDIA

PREGUNTA I

¿Cuál es la ecuación vectorial de la recta?

Al preguntar a Lidia sobre la ecuación vectorial de la recta, únicamente recordó que se requería un punto por el cual pasa la recta, pero al pedirle que represente geométricamente recordó algunos elementos más

L2: […] Es el punto […] el punto por el que pasa […] y […] hay no recuerdo



L14: Este es un vector, […] y este vector […] y con la diferencia se obtiene […] este otro vector […] y […] y […] no estoy muy segura si con un punto y este vector se puede
E15: Un punto, ¿cuál punto?
L16: Un punto que pertenezca a este vector
E17: Por ejemplo, ¿me das uno?
L18: A ver puede ser…

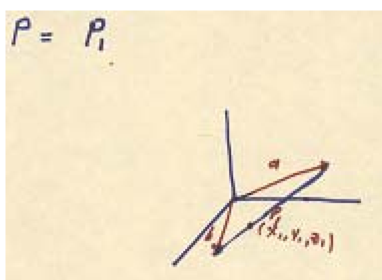


Imagen 8

Cuando Lidia hace referencia a *Un punto que pertenezca a un vector*, advertimos que piensa en los vectores como segmentos de recta, donde se pueden tomar cualquier punto.

Al proporcionarle la ecuación vectorial de la recta en la forma (II), comenta que la emplearon para obtener otras ecuaciones

E37: ¿Te es conocido?, ¿algo similar trabajaste en clase?

L38: […] Para sacar otras otros tipos de ecuaciones […] las simétricas y […]

Tal parece que Lidia ha generado un modelo mental de tipo geométrico asociado a la ecuación vectorial de la recta, que le permite recordar los elementos que entran en juego, como son el vector de dirección y un punto por donde pasa la recta.

PREGUNTA II

¿Qué es el vector dirección?

Lidia recuerda que debe efectuar la diferencia de dos vectores para obtener un tercero, pero no recuerda el concepto de vector dirección ni vector de posición

E63: ¿Recuerdas el concepto vector dirección?
L64: […] No
E65: ¿Vector de posición?
L66: […] No

Como en muchos casos, el modelo geométrico que trabaja Lidia parece ser resultado de una reproducción del trabajo del profesor, con pérdida de significado de ese actuar.

PREGUNTA III

¿Qué papel juega lambda en la ecuación vectorial de la recta?

Al preguntar sobre el efecto del escalar sobre el vector, Lidia considera que la magnitud del vector se afecta pero no toma en cuenta que el escalar toma diferentes valores.

E45: Este vector esta afectado por este escalar
L46: Sí
E47: ¿Qué le hace este escalar?
L48: […] Aumenta o disminuye […] su magnitud

Al igual que en el caso de Adrián, Lidia particulariza la expresión de la ecuación vectorial de la recta ignorando que el escalar debe tomar todos los valores de los reales y dar por consiguiente infinitos puntos en una misma dirección, dada por un vector particular.

PREGUNTA IV

¿Se puede sumar un vector con un punto?

Parece que Lidia no toma en cuenta el vector posición que corresponde a cada punto en el espacio cuando se le pregunta sobre la posibilidad de sumar un punto y un vector

E51: Este es un vector y este es un punto
L52: Sí
E53: ¿Los puedo sumar?
L54: […] No sé […]

Parece que la noción de suma para elementos semejantes se hace presente cuando Lidia responde no saber si puede sumar dos elementos distintos como son el punto y un vector.

PREGUNTA V

¿Entonces se trata de un conjunto finito o infinito?

Parece que Lidia sí considera la generación de infinitos vectores al afectar el vector dirección por un escalar que toma sus valores en los reales

E55: El hecho que el vector a este afectado por lambda, ¿cuántos elementos vamos a obtener, según esta expresión?
L56: […] ¿los mismos que los reales?
E57: ¿O sea?
L58: […] Infinidad

En particular, Lidia recuerda poco sobre la ecuación vectorial de la recta lo cual puede deberse a que su aprendizaje fue memorístico y pasado el tiempo no puede rescatar o integrar toda la información; sin embargo al cuestionarle sobre los elementos que conforman la ecuación vectorial de la recta, las respuestas dadas por Lidia muestran que los estudiantes pueden argumentar y plantear conjeturas que lleven a un aprendizaje apropiado ante preguntas formuladas en ese sentido.

Entonces resultará importante en el diseño se una situación didáctica que el estudiante reflexione sobre los elementos que entran en juego en la ecuación vectorial de la recta, pero también tendrá que generar una interpretación de toda la expresión y no ver únicamente los elementos aislados, sino como una serie de elementos que se conjugan para generar infinitos puntos en una misma dirección.

CONCLUSIONES DE LA ENTREVISTA

Como parte del estudio cognitivo propuesto en éste trabajo se plantea entrevistar algunos estudiantes con el objetivo de profundizar en las concepciones que tiene respecto a la ecuación vectorial de la recta. Esto es, se espera identificar aquellos modelos mentales que pudieran estar presentes en los estudiantes y que se relacionen con la ecuación vectorial de la recta. En esta acción se contempló la posibilidad de entrevistar a tres estudiantes que presentaron características diferentes en las respuestas dadas al cuestionario propuesto anteriormente.

Algunos puntos que se rescatan de las entrevistas son el hecho de asociar la ecuación vectorial de la recta en un sistema tridimensional, ya que cuando se presentó un sistema bidimensional requerían del tercer eje o bien no tomaban en cuenta el poder trabajar con vectores; la ecuación vectorial estudiada en su curso, parece limitar la idea de vector dirección, ya que éste necesariamente tiene que se parte de la recta, cuando esto representa casos particulares; se consideran a los puntos y vectores de modo indistinto, esto parece no tener mucha relevancia para el estudiante y asume el vector de posición de cada punto de modo natural; parece no tener tanta importancia el escalar, a pesar de ser el generador de la infinidad de puntos que conforman la recta; y aunque son estudiantes de nivel licenciatura, aún se identifican concepciones de la recta como algo limitado, con un principio o un segmento.

Además, la entrevista refuerza la caracterización efectuada en los estudiantes respecto al cuestionario que contestaron. Damián se caracterizó por dar respuestas relacionadas con situaciones de la vida diaria, y en la entrevista mostró tener más conocimientos sobre el tema de interés. Adrián se apegó a las definiciones, lo cual se repite en la entrevista; tal parece que el hecho de reproducir únicamente el trabajo del profesor solo lleva a un aprendizaje memorístico.

Lidia por su parte dio respuestas muy breves al cuestionario, situación que parece repetirse en la entrevista, pero a través de ésta última se rescata el modelo geométrico que ha generado en relación a la ecuación vectorial de la recta.

Por lo anterior podemos advertir que entre los estudiantes han generado modelos mentales en los que se pueden observar diferentes características. Por ejemplo, el modelo geométrico que reportan algunos estudiantes presenta la característica coercitiva ya que limita la idea de vector dirección únicamente a aquellos que se encuentra sobre la recta. Esta misma característica se presenta ante la disyuntiva de poder sumar dos elementos distintos como son un punto y un vector. Además, se observa un rasgo característico de perseverancia en torno a los posibles valores que puede tomar el escalar, porque los estudiantes a pesar de reconocer que los escalares pueden ser infinitos como los reales, persiste la idea de recurrir a los número naturales o en el mejor de los casos los reales positivos; lo que conlleva tener vectores dirección que no cambia de sentido.

CONCLUSIONES

Este trabajo se propuso identificar concepciones en los estudiantes respecto a la ecuación vectorial de la recta, con la intención de ofrecer elementos que orienten el diseño de una secuencia didáctica para el estudio de dicho concepto; el cual forma parte de la asignatura de Geometría analítica a nivel superior en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán.

Cuando los alumnos estudian de la ecuación vectorial de la recta, se enfrentan a diferentes dificultades como son trabajar en un nuevo sistema de referencia; pasando de dos a tres dimensiones, así como ver involucrado la idea de vector como elemento determinante en la orientación de la recta. Reconociendo que en el bachillerato se propicia un aprendizaje basado en algoritmos, los estudiantes en su primer semestre en la universidad aun no se encuentran preparados para enfrentar las demostraciones que este nivel educativo demanda. Ante esta situación, se decide realizar este trabajo partiendo del análisis de las producciones de los estudiantes, siendo éstas las formas en las que se pueden hacer explícitas las concepciones que tienen respecto al tema que nos interesa.

En un primer momento, se analizó un reactivo específico de una prueba escrita, aplicada por el profesor de grupo, el cual involucraba la ecuación vectorial de la recta. Como resultado del análisis, se concluye que entre los estudiantes existe un fuerte énfasis en reproducir el trabajo del profesor y se manifestó una falta de comprensión respecto a los elementos que conforman la ecuación vectorial de la recta. Como se discute en el apartado *1.2 Análisis a las producciones de estudiantes en el estudio de la ecuación vectorial de la recta*.

A partir de lo observado, se plantea la necesidad de realizar un estudio para ofrecer información para un diseño experimental. La ingeniería didáctica ofrece un acercamiento robusto ya que permite considerar a los actores del sistema didáctico de forma aislada y a la vez establecer vínculos entre ellos, relacionarlos en un ámbito sociocultural. En particular, la ingeniería didáctica considera tres dimensiones: la epistemológica, la didáctica y la cognitiva; pero para efectos de este trabajo la primera se integra solo por un acercamiento histórico al concepto de vector, lo cual se debe a que consideramos que es un elemento nuevo para los estudiantes de tal forma que nos interesa conocer el desarrollo que presentaron para tratar de identificar nociones para su comprensión. En relación al análisis didáctico, se tomó especial énfasis los dos libros reportados por el profesor en la preparación de sus clases sobre el tema de vectores y la ecuación vectorial de la recta, y de donde se observa cómo éstos ejemplares logran generar consensos entre los alumnos al ofrecer modelos sobre el tema de estudio y favorecer el estudio algebraico del mismo.

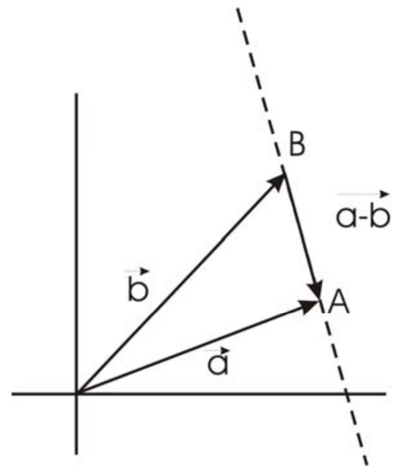
Para abordar la dimensión cognitiva se diseñó un cuestionario por medio del cual se trató de identificar ideas asociadas a la recta y a los vectores. Al aplicar el cuestionario a los estudiantes, se obtiene que el término recta es ampliamente conocido y lo asocian a su vida diaria, sin embargo se dan algunas interpretaciones que los llevan a pensar en la recta como algo finito. Por otro lado, en relación al término vector parece quedarse en el lenguaje escolar, ya que poco pueden reportar que no se apegue a las definiciones vistas en el aula.

Siempre correspondiendo a la dimensión cognitiva, con la intención de profundizar en las ideas de los estudiantes respecto a la ecuación vectorial de la recta, se realizaron entrevistas guiadas. Para ello, se eligieron a tres estudiantes que habían contestado el cuestionario aplicado, y cuyas respuestas se caracterizaron en un caso, por apegarse a las definiciones escolares; otro por dar respuestas enfocadas o aterrizadas a situaciones cotidianas y el último cuyas respuestas fueron muy breves. Estos estudiantes, en su preparación de bachillerato habían cursado un semestre de geometría analítica donde estudiaron la recta en dos dimensiones. La entrevista se realizó posterior al curso del primer semestre en la universidad, de tal modo que habían estudiado un semestre de geometría analítica, curso que habían aprobado para este momento.

El principal objetivo de la entrevista era identificar modelos mentales que no favorecen al estudio de la ecuación vectorial de la recta, basados en algunos elementos teóricos respecto a la cognición, particularmente acerca de la intuición y de los modelos intuitivos; aspecto central y en que se basó esta investigación.

Fischbein afirma que en la matemática existen dos tipos de conocimientos o cogniciones: los intuitivos y los lógicos. Los primeros son aquellos *auto-evidentes* mientras que los segundos están basados en una serie de pasos y que proporcionan una prueba indirecta. Proponiendo características al conocimiento intuitivo.

De las entrevistas podemos advertir que entre los estudiantes han generado modelos mentales donde se pueden observar algunas de las características propuestas por Fischbein. Por ejemplo, el modelo geométrico que reportan algunos estudiantes presenta la característica coercitiva ya que limita la idea de vector dirección únicamente a aquellos que se encuentra sobre la recta.



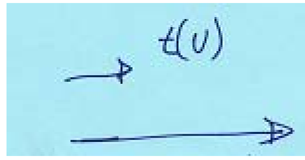
Resultaría importante entonces considerar en el estudio de la ecuación vectorial de la recta a partir la forma

$$P = \{P_0 + \lambda\, \mathbf{a} \mid \lambda \in \Re\}$$

evitando su estudio a partir de dos puntos por donde pasa la recta, tal y como se trabaja en el bachillerato. Aunque esta idea de una generalización al estudiar la recta de un sistema bidimensional a uno tridimensional, parece llevar al alumno a un conflicto al considerar la ecuación del plano como la ecuación de la recta en tres dimensiones.

En otro aspecto donde se observa la característica coercitiva es ante la disyuntiva de poder sumar dos elementos distintos como son un punto y un vector, situación no tan difícil de tratar considerando que en el curso de hace explícita la relación existente entre cada punto del espacio con un vector de posición o radio vector, con lo cual se reduce el conflicto que presentaron algunos estudiantes.

Otro rasgo característico observado corresponde al de perseverancia en torno a los posibles valores que puede tomar el escalar que a pesar de reconocer que pueden ser infinitos como los reales, persiste la idea de recurrir a los números naturales o en el mejor de los casos los reales positivos; lo que conlleva tener vectores dirección que no cambia de sentido. Este rasgo puede resultar un tanto más complicado de erradicar pero con el apoyo del recurso tecnológico puede atenderse de manera tal que ofrezca al estudiante tantos ejemplos como tiempo pueda disponer con el equipo de apoyo.



Todo lo presentado hasta este momento, es tomando en cuenta el modelo didáctico más simple en el cual se relaciona el saber con el profesor y el alumno. Donde la construcción del conocimiento se realiza dentro de las prácticas sociales y el contexto considerado en este estudio es particular: alumnos del primer semestre de las licenciaturas en actuaría, enseñanza de las matemáticas y matemáticas de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Yucatán. Lo anterior nos hace referencia a un entorno particular el cual posee sus propias prácticas, en otras palabras estamos reconociendo el aspecto sociocultural que lo describe.

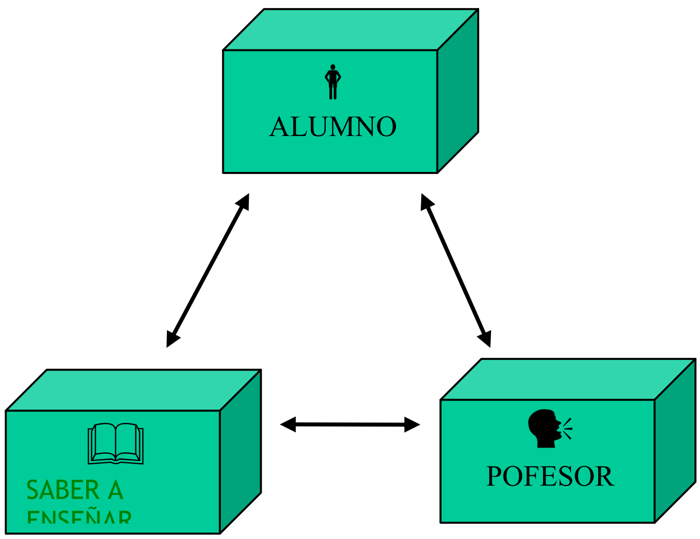


Figura 8

Cada uno de los elementos que forman parte del sistema didáctico elemental, puede considerarse como una caja no vacía. Por ejemplo en relación a los aspectos que interesan a este estudio, el saber estará determinado por la evolución de los conceptos involucrados en la ecuación vectorial de la recta, así como la transposición a la que fue sujeta para poder ser introducida al sistema escolar. Este saber se hace explícito por medio de los libros de texto los cuales al estudiar la ecuación vectorial de la recta se favorecen aspectos algebraicos ante los geométricos que parecen limitados. El profesor, trae consigo su epistemología respecto a cómo se aprende y cómo debe enseñarse la ecuación vectorial de la recta. Y el alumno lleva un cúmulo de conocimientos previos, entre los cuales pueden encontrarse obstáculos como los reportados anteriormente.

Dependiendo de los contenidos de cada caja, se determinará en tipo de relaciones que se establezcan entre los elementos.

La relación saber-profesor: Para el profesor, los libros de texto son los medios que permiten relacionarse con el saber y por lo tanto se infiere que se favorecerán nuevamente aspectos algebraicos en la enseñanza de la ecuación vectorial de la recta limitando el modelo geométrico ofrecido a los estudiantes.

La relación saber-alumno: Para el alumno el libro de texto le provee de modelos a los cuales recurrirá cada vez que requieran el concepto en cuestión. Así, en el alumno se favorecerán aquellos ofrecidos por el libro de texto.

La relación profesor-alumno: En la enseñanza del profesor se manifiesta su epistemología, la cual está influenciada por el libro de texto, pero el estudiante asume como contrato didáctico reproducir el trabajo del profesor.

De las relaciones presentadas y según el esquema elemental del triángulo didáctico, las flechas indican que la relación establecida entre los elementos serían bidireccionales, esto es, que uno genera influencia en el otro y viceversa. Pero en el caso de la relación saber-profesor podría no considerarse la relación en los dos sentidos ya que el profesor no cambiaría el contenido, enfoque o presentación del libro, sin embargo, puede optar por cambiar lo propuesto en él.

Como puede suponerse, a partir de las conclusiones presentadas en las entrevistas a los estudiantes; existen elementos que parecen obstaculizar la comprensión de la ecuación vectorial de la recta. De tal modo que a partir de ellos se sugieren algunos aspectos a tomar en cuenta en el diseño de situaciones didácticas para el estudio de la ecuación vectorial de la recta.

- Estudiar la ecuación vectorial de la recta a partir de la forma de conjunto, en el cual el vector dirección no necesariamente es parte de la recta.
- Apoyarse de algún recurso tecnológico por medio del cual se puede ofrecer a los estudiantes más de un modelo geométrico.
- El recurso tecnológico posibilita contar con infinidad de casos particulares de puntos que construyen una recta.
- Propiciar en el alumno el conflicto de sumar elementos diferentes para resaltar la noción de vector de posición o radio vector.

Para efectos de este trabajo consideramos haber identificado algunos elementos que puedan orientar el diseño de situaciones didácticas para el estudio de la ecuación vectorial de la recta, sin embargo, hay aspectos que se abordan que pueden derivar en otros estudios. Por mencionar algunos están desarrollar la dimensión epistemológica, considerando que en éste trabajo se presento un primer acercamiento histórico sobre vectores; la práctica escolar, que se dejó margen en este trabajo aunque se infieren algunos aspectos en torno a ello.

BIBLIOGRAFÍA

Anido, M., Roberto López y Héctor Rubio Scola (2002). *Una ingeniería didáctica construida alrededor de las familias de supercónicas como sistema genérico organizacional*. [En línea] Disponible en: http://departamentos.unican.es/digteg/ingegraf/cd/ponencias/307.pdf [1 de marzo, 2004].

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica en Educación Matemática. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bachelard, G., (1972). La formación del espíritu científico. Contribución al psicoanálisis del conocimiento objetivo. (Siglo XXI: Buenos Aires).

Brousseau, G. (1976). La problématique et l'enseignement des mathématiques, XXVIIIeme rencontre de la CIEAEM, Louvain la Neuve. Reproduit dans (1983). Reserches en Didactique des Mathématiques. 4 (2), México, DIE-Cinvestav, pp. 164-198.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problemes des Mathématiques. Reserches en Didactique des Mathématiques. 4 (2), México, DIE-Cinvestav, pp. 165-198.

Brousseau, G. (1986). Fondements et methods de la didactique des mathématiques. Reserches en Didactique des Mathématiques. 7.2, p. 22-115. Grenoble: La Penseé Sauvage.

Brousseau, G. (1998). Théorie des situations didactiques. Grenoble: La Penseé Sauvage.

Cantoral, R. (1993). Hacia una didáctica del cálculo basada en la cognición. *Publicaciones Centroamericanas*. 7. 391-410.

Cantoral, R. (2001). Sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos didácticos. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol 14. pag. 64-75

Cantoral, R.; Farfán, R.; (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol.6 Núm. 1 pag.27-40

Caserio, M., Guzmán M. y Vozzi, A. (2001). *Una estrategia didáctica para el aprendizaje de superficies. RELME 15* (Argentina: 23-27 JULIO, 2001) Buenos Aires: Estudio Sigma S.R.L., p.95

Chevallard, Y., et al. (1998). Estudiar Matemáticas, el eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje. Biblioteca para la actualización del Maestro SEP/ICE Universitat de Barcelona.

Douady, R. (1996). Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de Collage-Seconde. (P. Ferreiras-Soto, Trad.). En: Enseñanza de las matemáticas: relaciones entre saberes, programas y prácticas (pp. 241-356). Francia: Toxiques éditions. Publicaciones de IREM.

Fava, N. y Corach, G. (2001). *Vectores en el plano y en el espacio.* RELME 15 (Argentina: 23-27 JULIO, 2001) Buenos Aires: Estudio Sigma S.R.L., p.38

Fischbein, E. (1987). Intuition in science and matematics: an educational approach. Holland Ed. Reidel Publishing Company.

Fischbein, E. (1989). Tacit Models and Mathematical Reasoning. *For the Learning of Mathematics.* 9 (2), 9-14.

Gascon, J. (1997). Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la universidad. Suma 26 pp. 11-21.

Hasser, N.; La Salle, J.; Sullivan, J. (1990). Análisis Matemático. Curso de introducción. Ed. Trillas. México. Vol. 1.

Linchevski, L., Vinner, Sh. (1988). *The naive concept of sets in elementary teachers.* Proceedings of the Twelfth International Conference, Psychology of Mathematics Education. Vol. 11, 471-478. Vezprém, Hungary.

Molina, J. G. (2004). *Las concepciones que los estudiantes tienen sobre la transformación lineal en contexto geométrico*. Tesis de maestría no publicada. Cinvestav. México.

Nérici, I. (1985). Hacia una didáctica general dinámica. Argentina: Kapelusz.

Piaget, J. (1975). L'equilibration des structures cognitives. Etudes d'épistemologie génétique Paris: PUF

Piaget, J. (1979). Los datos genéticos. En: Tratado de Lógica y conocimiento científico. Tomo III-epistemología de la matemática. Ed. Paidos. Buenos Aires.

Porlan, R. (1995). Las creencias pedagógicas y científicas de los profesores. Enseñanza de las Ciencias de la Tierra, 3(1), pp.7-13

Porlan, R. (1998). Conocimiento profesional y epistemología de los profesores, II: estudios empíricos y conclusiones. Enseñanza de las Ciencias, 16(2), pp.271-288

Ruiz, L. (2001). Ingeniería didáctica. Construcción y análisis de situaciones de enseñanza-aprendizaje. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 14 pag. 122-130

Sierpinska, A., Hillel, J. & Dreyfus,T.(1998): Evaluation of a teaching design in linear algebra: the case of vectors. Grenoble, France: La Pensée sauvage.

Socas Y Palarea (1997). Problemas específicos en la enseñanza-aprendizaje del álgebra escolar. Dificultades, obstáculos y errores. Uno. Revista de Didáctica de las matemáticas. No. 14 Octubre

Solís, R.; Nolasco, J.; Victoria, A. (1984). Geometría analítica. Universidad Nacional Autónoma de México. México.

Turegano, P. (1997). El aprendizaje del concepto de integral. Suma 26, pp. 39-52

Wilkins, D. (1999). On geometrical nets in space (artículos de William Rowan Hamilton, publicados en The Royal Irish Academy, 7 (1862), pp. 532-582.)

Wilkins, D. (1999). On Symbolical Geometry (artículos varios de William Rowan Hamilton, publicados en The Cambridge and Dublin Mathematical Journal, en los años 1846 a1849)

Wilkins, D. (2000) On quaternions, or on new system of imaginaries in algebra. (artículos varios de William Rowan Hamilton publicados en *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* (3rd Series), en los años 1844 a 1850)

ANEXO

ANEXO A
PRIMERA ENTREVISTA

EJEMPLO 1: Liliana

1. P: ¿Qué nos estaba solicitando este reactivo?
2. E: Hallar las ecuaciones de la recta (lee el reactivo)
3. P: Para dar la ecuación vectorial de la recta ¿qué elementos se requieren?
4. E: ¿Vectores? recuerdo
5. P: ¿Muchos, uno, dos?
6. E: Uno, no recuerdo
7. P: En la redacción del reactivo, ¿nos dan el vector o lo tenemos que buscar?
8. E: No, lo tienes que buscar
9. P: ¿A partir de que datos busco ese vector?
10. E: A partir de las ecuaciones
11. P: ¿Cuáles ecuaciones?
12. E: (Las lee)
13. P: Esas ecuaciones, ¿de qué son?
14. E: De dos planos
15. P: ¿Cómo puedo utilizar esas ecuaciones para hallar el vector?
16. E: Si mal no recuerdo, sacando los coeficientes de las ecuaciones de los planos
17. P: Y esos coeficientes, ¿significan algo?
18. E: Son los vectores
19. P: ¿De quién?
20. E: De esas ecuaciones de planos
21. P: ¿Qué tipo de vectores son?, ¿pertenecen al plano?
22. E: Sí
23. P. El vector que se obtiene realmente es un vector normal al plano, ¿qué significa que sea normal?
24. E: No recuerdo
25. P: Es un vector perpendicular al plano
26. P: Luego ¿qué hiciste?
27. E: Multipliqué el punto por los vectores que obtuve de los planos

28. P: ¿Qué punto?

29. E: El que me dan... no agarré un vector “x” a_1, a_2, a_3

30. P: ¿Quién sería ese vector?

31. E: No me acuerdo

32. P: Planteas el producto punto entre tres vectores, ¿después que sucede?

33. E: Multipliqué los dos de la derecha

34. P: Cuando estudiaste vectores, vieron dos tipos de producto, ¿cuáles son?

35. E: Producto punto y producto cruz

36. P: ¿Qué diferencia hay entre ellos?

37. E. Producto punto [...] ¿cuál es? [...] no recuerdo

38. P: El resultado del producto punto es un escalar y para el producto cruz es un vector.

39. P: Realizaste el producto punto entre los dos vectores normales y das el resultado, ¿es correcto?

40. E: Sí

41. P: ¿Puedes efectuar el producto punto del vector que buscamos con el resultado anterior?

42. E: Según lo que dices, ya no

43. P: ¿Por qué?

44. E: No se.

45. P: ¿Qué entiendes por escalar?

46. E: No recuerdo [...] se borró de mi mente

47. P Cuando realizamos el producto punto el resultado es un número, ¿cual sería?

48. E: (Hace el cálculo y dice) 12

49. P: ¿Puedo efectuar el producto punto entre un vector y un escalar?

50. E: No

51. P: Al vector normal del primer plano, ¿cómo le llamaste?

52. E: a

53. P: ¿Y al vector normal del segundo plano?

54. E: b

55. P: ¿Y al vector que estas buscando?

56. E: a

57. P: ¿Pueden llamarse igual?

58. E: No

59. P: ¿Y por que se llamó igual?

60. E: En las hojas donde está la definición siempre manejábamos vector a y poníamos a_1, a_2, a_3 y por costumbre lo ponemos igual.

61. P: Entonces nombramos a dos vectores por una costumbre de la clase,

62. P: Por otro lado cuando efectúas el producto punto, el resultado debe ser un escalar sin embargo lo dejas expresado como si fueran las componentes de otro vector para que puedas el producto con otro vector

63. E: Lo obligué

64. P: Suponiendo que si puedes efectuar el producto, lo realizas y simplificas la expresión ¿y después?

65. E: Intentaba igualarlos todos a un mismo término por ejemplo en a_1, a_2 o a_3 pero ya no alcanzó el tiempo

66. P: Y ¿por qué pretendías hacer eso?

67. E: Me acordaba que el ejercicio era sí, dejarlo en una sola variable y después ya tenías la ecuación haciendo la sustitución

68. P: ¿Recuerdas el procedimiento que hicieron en clase?

69. E: Sí

70. P: ¿Podrías resolver ahora el ejercicio?

71. E: Ahora no, no me acuerdo.

EJEMPLO 2: Miguel Angel

1. P: Explícanos lo que realizaste

2. E: Primero saque los coeficientes de los dos planos y realicé el producto punto

3. P: Del primer plano tomas los coeficientes de las variable x, y, z y lo integras en ¿un punto o un vector?

   E: Un vector

4. P: Y vas a efectuar un producto con otro vector, ¿qué vector es?

5. E: Como no se conoce es x, y, z

6. P: Ese vector ¿para que me va a servir?

7. E: [...] para nada

8. P: ¿Qué nos están pidiendo?

9. E. Ah no [...] si, si, para después poder cancelarlo, para formar con estos dos planos y esos nuevos puntos esas dos nuevas ecuaciones se hace un sistema para buscar los otros puntos faltantes

10. P: Entonces ¿realizaste el producto punto entre el vector que tomamos del plano y un vector que estoy buscando?

11. E: Sí

12. P: Lo mismo se hace con el segundo plano, realizas los productos y ¿qué más?

13. E: Después cancelo, podría ser cualquier variable, pero que queden en términos de una nada más, ...en este caso cancelé z y me quedó que x igual a 62y sobre 13 y en la otra cancelé “y” y me quedó x igual a -62z sobre 11
14. P: Después ¿qué hicimos?
15. E: Como son iguales las x, x es igual a estas dos (indica las soluciones anteriores)
16. E: Y por [...] aquí como no tiene otro coeficiente, me acuerdo que se le pone un denominador y estos se bajaban, 62 y 13 y por la ley del sándwich se suben y como quedó abajo sería el punto 1, 13/62, 11/62
17. P: Esta expresión que tienes acá ¿qué nombre recibe? (mostrando la igualdad propuesta anteriormente)
18. E: Parece que son las ecuaciones paramétricas
19. P: ¿Por qué le incluiste este –0?...
20. E: [...]
21. P: En la línea de arriba no lo tiene y tampoco tiene el denominador 1 y tú se lo incluiste para que todos tengan denominador, pero a la primera parte de la igualdad le incluiste –0, ¿por qué?
22. E: Porque no tiene, los otros tienen otro coeficiente y como esta solo me acuerdo que se le agregaba un número
23. P: Entonces ¿obtenemos?
24. E: Un nuevo punto que es 1, 13/62, 11/62 y después se multiplica por 62 y queda
25. P: Y esto (indicando el vector formado) ¿qué es?
26. E: Un nuevo vector
27. P: ¿Qué salió a partir de estas?
28. E: De las ecuaciones
29. P: ¿Qué tipo de ecuaciones son?
30. E: Parece que son las paramétricas
31. P: Teniendo el vector, ¿para qué va a servir?
32. E: Hay una fórmula que dice P igual a p_1 más lambda por un, me faltaba un vector como tengo un punto y lambda es un número cualquiera, es una constante, me faltaba un punto que es este vector y el nuevo vector que obtuve. Y esta sería la ecuación vectorial, las paramétricas y me faltaron las simétricas, que se me olvido
33. P: ¿Se te olvido ponerlas?
34. E: Sí
35. P: ¿Las podrías poner ahora?
36. E: Sí
37. P: Escríbelas ahora
38. E: Era despejar lambda (las escribe)

EJEMPLO 3: Oldi

1. P: ¿Qué nos pedía el reactivo 5?
2. E: (Lee el reactivo)
3. P: ¿Qué estamos buscando?
4. E: Las ecuaciones de la recta
5. P: ¿Qué requerimos para obtener las ecuaciones de la recta?
6. E: Un punto
7. P: ¿Es suficiente?
8. E: Un punto y la pendiente, o dos puntos
9. P: ¿Qué nos proporcionan en el reactivo?
10. E: Un punto y dos ecuaciones de los planos
11. P: Ya tenemos un punto, ¿qué nos hace falta?
12. E: El otro punto
13. P: ¿Cómo llamas al punto que nos dan?
14. E: P_1
15. P: Escribes pi y p_2, ¿con qué los defines?
16. E: Son los números directores [...] son otros puntos
17. P: ¿Qué realizas después?
18. E: Multiplico a por pi
19. P: ¿Quién es a?
20. E: Es un número que nos va a dar
21. P: ¿Qué tipo de operación estas efectuando entre a y pi?
22. E: Una multiplicación
23. P: ¿Para qué realizamos esta multiplicación?
24. E: [...] Para que [...] “a” va a ser ... ya que multiplicamos va a quedar a_1, a_2, a_3 [...] lo que va a ser el otro punto [...] y después multiplico por pi lo que viene siendo otro punto, las dos ecuaciones que dan las igualo a cero para sacar la ecuaciones de a_1, a_2
25. P: ¿Luego?
26. E: Quedan en función de a_3
27. P: ¿Después?
28. E: Luego se multiplican por 11, para eliminar el denominador y se agarra el coeficiente del numerador sin agarra a_3 [...] viene siendo otro [...] el plano [...] viene siendo otro punto
29. P: Otro punto, ¿qué representa esto? (indicando $P = p_1 + \lambda a$)
30. E: Representa la fórmula del plano
31. P: ¿Qué significa lambda?
32. E: Lambda viene siendo una [...] el vector [...] no, no se no me acuerdo

33. P: Dices que P es igual al vector que obtuviste más lambda veces el punto dado, cambiaste el punto por el vector, ¿por qué?
34. E: Lo confundí y se me acababa el tiempo, sí sabia como iban los puntos pero se me revolvió
35. P: Repitiendo un poco [...] ¿qué significa esto? (indicando la ecuación vectorial de la recta)
36. E: Fórmula del plano
37. P: Y ¿qué nos pedían?
38. E: Las ecuaciones de la recta
39. P: ¿Es lo que obtuvimos?
40. E: No [...] no
41. P: La siguiente expresión ¿qué significa? (mostrando las ecuaciones paramétricas)
42. E: Eran dos [...] eran los números directores [...] no me acuerdo
43. P: ¿Y la ultima expresión? (indicando las ecuaciones simétricas)
44. E: No me acuerdo
45. P: En este momento, ¿puedes responder el reactivo?
46. E: Sí podría resolverlo, pero como no recuerdo bien el significado de cada cosa
47. P: Una pregunta, al principio al integrar el sistema de ecuaciones, ¿para qué era?
48. E. Para hallar el vector de dirección
49. P: Y ¿por qué tengo que realizar el producto punto?
50. E: Para poder despejar a_1, a_2, los tres puntos
51. P: Y ¿qué significa que el producto punto lo iguale a cero?
52. E: [...]
53. P: ¿Recuerdas que lo hicieron en clase?
54. E: No me acuerdo por que se iguala a cero

EJEMPLO 4: Claudia

1. P: ¿Estuviste presenta en la clase donde se abordó el concepto de ecuación vectorial de la recta?
2. E: No, no estaba presente
3. P. ¿Estuviste presente cuando se abordo el concepto de ecuación vectorial del plano?
4. E: No, tampoco
5. P: ¿Cómo estudiaste para este examen?

6. E: A partir de estos temas, lo que hice fue sacar copias [...] acababa de llegar de viaje [...] le saque copias a toda la unidad y si me ayudó a estudiar; pero siento que no es lo mismo a estudiarlo así nomás, a tomar la clase.
7. P: ¿Copias de qué material?
8. E: Un libro del libro, de Lheman, y de las libretas de los compañeros
9. P: Ahora centrándonos en la respuesta al reactivo 5, puedes observar la indicación de la maestra que dice “esta es la ecuación de la familia de planos no de una recta” ¿estás de acuerdo lo que dice la maestra?
10. E: Sí
11. P: ¿Por qué optaste por plantear esa ecuación de la familia de planos?
12. E: Fue confusión, realmente lo que quise hacer si fue la de la ecuación de la familia de planos no de la recta, pero creo que habían varios ejercicios parecidos y por eso fue que yo lo resolví de esa manera.
13. P: según el procedimiento y la respuesta que das ¿qué fue lo que encontraste?
14. E: Según lo que yo hice? Se hallo la familia de planos y nos pedían de una recta.
15. P: ¿en la familia de planos que significa el parámetro k?
16. E: No, recuerdo
17. P: ¿En este momento, podrías resolver este ejercicio?
18. E: No
19. P: ¿Que elementos identificas en la redacción del reactivo 5?, ¿qué datos nos proporcionan?
20. E: teniendo el punto ya podemos sustituir en las ecuaciones para hallar la recta y nos dan otro dato adicional de que debe ser paralela a los planos
21. P: el hecho de que deba ser paralela a los planos, ¿no lo utilizaremos?
22. E: No se.

III. ENTREVISTA A ESTUDIANTES QUE RESPONDIERON CORRECTAMENTE EL REACTIVO

CASO 1: LILIA

Aprobó el examen con 84 puntos + 10 de ejercicios, exenta el curso con 97 puntos de calificación y no tiene que presentar el examen ordinario.

1. P: Platícanos lo que se plantea en la solución

2. E. No piden hallar la ecuación de la recta y sabemos que la formula es P igual a P_1 más lambda por el vector a
3. P. En esta formula ¿qué significado tiene P_1?
4. E: P_1 es un punto de la recta
5. P: En el caso que nos piden resolver, ¿conozco P_1?
6. E. Sí, el ejercicio en la instrucción nos dice que pasa por el punto 6, -1, 3
7. P: Nuevamente sobre la fórmula, ¿qué es este vector a, quién es?
8. E: Es el vector de dirección de la recta que nos piden hallar
9. P: ¿Qué nos pide hallar?
10. E: La recta
11. P: ¿Conozco el vector de dirección en este caso?
12. E: No, pero nos dan otros datos con los que lo podemos hallar, que nos los planos, nos dice que esos dos planos son paralelos a la recta
13. P: Y eso ¿qué significa, para que nos serviría?
14. E: Que el vector de dirección es igual, el vector [...] tiene el mismo vector de dirección el plano y la recta
15. P: ¿El plano tiene vector de dirección?
16. E: Sí, porque está conformado por un conjunto de rectas y en este caso sería 2, 7, 3 en el caso del plano 2x + 7y + 3z - 16
17. P: En este caso esto ¿qué es? (indicando el vector anterior, el 2,7,3)
18. E: El vector normal de la [...] del plano
19. P: Este vector normal ¿sería el vector dirección para la recta?
20. E: No, cumple con la condición de que su producto es cero
21. P: Porque sería cero su producto, ¿qué producto para empezar?
22. E: No entendí la pregunta
23. P: Si cuando dice “cumplen la condición de que le el producto es cero”, pero ¿qué tipo de producto tenemos producto punto, producto cruz?
24. E: El producto punto es cero
25. E: Entonces ya sacamos el vector normal del plano y el de la recta como no lo conocemos le asignamos simbólicamente vector “a” como a_1, a_2, a_3 que son las componentes, entonces efectuamos el producto punto
26. P: ¿Por qué me debe dar cero?
27. E: ¿Por qué debe dar cero?.... no recuerdo... ¿por qué?
28. P: Vamos a continuar y luego podemos platicar sobre ello
29. E: Luego nos dan el otro plano, que también es paralelo a la recta entonces cumple lo mismo que hicimos con el primero, sacamos el vector normal del plano del segundo plano que

es –1, 2, 8 y con el mismo vector normal de la recta que no conocemos realizamos el producto punto

30. P. ¿Me debe dar..?

31. E: Cero

32. P: Aunque no recordamos porque debe dar cero

33. E: Resolvemos el sistema de ecuaciones cuando realizamos el producto punto, para hallar los valores

34. P: ¿De quién?

35. E: De a, a_1, a_2 y a_3

36. P: O sea, las componentes del vector a

37. E: Realicé por suma y resta y halle el valor de a_2 en función de a_3 y luego ese valor lo sustituí en la otra ecuación y hallé a1 también en función de a_3

38. P: ¿Después?

39. E: Como ya tenia, ya tengo el vector a, sus componentes a_1, a_2, a_3, entonces a_1 la dejo, a_2 ya la halle en función de, a_1 la cambio porque hallé todas en función de a_3 , entonces a_1 lo cambio por la que encontré en función de a_3 y así todas para que queden parejas

40. E: Y luego para que me quedaran, como se dice, sin el denominador porque me dio fracción hice a_3 igual a 11 para que de esta manera me quedaran números parejos

41. P: ¿a_3 solo puede tomar el valor de 11?

42. E: Bueno en este caso, pienso que sí

43. P: Continuamos, le damos el valor de 11 y obtenemos

44. E: El valor del vector a, que necesitamos para hallar la ecuación vectorial de la recta entonces solo sustituimos el dato que nos daban del punto y el valor del vector en la ecuación, lo sustituí y esa es la ecuación general pero como lo que nos piden es hallar todos los tipos de ecuación de la recta entonces involucra hallar las ecuaciones paramétricas y la simétrica

45. P: ¿Las cuales las obtienes a partir de [...]?

46. E. De la general

47. P: Retomando el trabajo, identificas que requieres un vector que le va a dar dirección a la recta y a ese vector le llamaste vector a, ¿puede tener otro nombre o necesariamente se tiene que llamar vector a?

48. E: No puede ser lo que tu quieras, eso es solo como un símbolo para identificar que es lo que estas buscando

49. P: Tú le denominas a y sus componentes son a_1, a_2, a_3.

50. P: Posteriormente de los planos obtienes los vectores normales, de acuerdo, con estos vectores uno de cada plano efectúas el producto punto con el vector a, este producto punto debe dar cero, no nos acordamos porque tiene que dar cero.

51. P: De ahí obtenemos dos ecuaciones, a partir de ellas logras determinar el valor de a_1 y a_2 en función de a_3, con estos datos puedes dar un valor para el vector a, en función de a_3 que le das el valor de 11 para eliminar denominadores.
52. P: ¿Puede tomar otro valor? Comentamos que no
53. P: Obtenemos que a es el vector –62, 13, 11 con este vector dirección y el punto dado en el ejercicio ya puedo dar la ecuación de la recta
54. P: En esta ecuación que das, donde P es igual a 6, -1, 3 más lambda multiplicado por –62, 13, 11 ¿qué significa lambda?
55. E: [...] no me acuerdo
56. P: Observemos que 6, -1, 3 es p_1 un punto y –62, 13, 11 es el vector dirección y lambda está multiplicando el vector dirección, la suma de esto es igual a P, ¿qué es P?
57. E: [...] no recuerdo [...] no
58. P: ¿En algún momento hablaron de la ecuación vectorial de la recta?
59. E: [...] sí lo mencionaron
60. P: En tu resultado das, las ecuaciones paramétricas y las ecuaciones simétricas y hablas de la ecuación general de la recta, ¿cuál sería la ecuación vectorial?
61. E: De hecho, no se si estoy recordando mal, en este ejercicio se refiere a la recta como vectores por eso se le damos esos valores

CASO 2: ASTRID

Aprobó la asignatura con 98 puntos, no presento el ordinario. Los tres parciales fueron aprobatorios.

1. P: ¿Qué fue lo que hiciste?
2. E: Primeramente se hallaron los números directores de cada uno de los planos
3. P: ¿Cómo lo haces?
4. E: Es tomar los coeficientes de las variables que tenemos en la ecuación y el termino independiente pues en este momento no lo estaríamos trabajando, lo mismo se realiza con el segundo plano únicamente se toman los coeficientes con todo y el signo positivo o negativo para tomarlo como vectores
5. P: ¿Qué vectores son?
6. E: Los vectores normales del plano
7. P: ¿Qué significa que sean vectores normales?

8. E: El vector normal es aquel que es perpendicular o que cumple con la propiedad de que el producto punto es igual a cero

9. P: El producto punto ¿De quién?

10. E: De un vector que pertenece al plano con ese vector normal, un vector que pasa por el punto en el que tocan el plano y el pie de la recta

11. P: Por ejemplo en el plano 1 que es 2x+7y+3z-16=0 dices que el vector 2,7,3 es normal a ese plano, ¿hay otros vectores normales?

12. E: [...] yo diría que no, ese es el vector normal en cualquier punto que pertenezca al plano.

13. E: Posteriormente, vamos a formar dos ecuaciones, para eso vamos a recordar el concepto de producto punto que si dos vectores son perpendiculares entonces este es cero y multiplicamos el vector normal del primer plano por un vector cuyas coordenadas, cuya terna ordenada no conocemos, le llamaremos para este caso a, b, c y esto puede diferir y realizamos el producto punto es digamos abscisa por abscisa, ordenada por ordenada y cada uno de los elementos todo igualado a cero.

14. P: Este vector que le estas llamando componentes a, b, c ¿qué vector es?

15. E: Es el vector que pertenece al plano, vamos analizar en eso, nunca me había puesto a pensar en eso [...] van a ser los números directores del plano sino me equivoco

16. P: ¿Por qué hago el producto punto?

17. E: Para poder formar un sistema de ecuaciones, y al resolverlo podemos obtener los elementos que van a formar parte de la recta paralela que me están pidiendo

18. E: Ya hicimos esto para el primero, realizamos lo mismo en el segundo caso, ya tomamos los números directores del vector normal que son los iniciales y lo multiplicamos por en este caso por a, b, c y ahora sí hacemos el sistema de ecuaciones.

19. E: El método de solución cada quien tiene el suyo y ya los números que vamos hallar los vamos a tomar como los números de dirección del plano, lo que le decía el vector perpendicular al vector normal

20. P. Después

21. E: Pero en este caso por ejemplo nos dio 12/13 y nos decía la maestra que podemos particularizar, dar un valor propio a uno de los coeficientes de tal manera que se nos eliminaran, porque los que hicimos acá es que al solucionar el sistema es dejarlo todo en términos de una misma variable y aquí por ejemplo yo halle los de a y de c, se sustituyen a y c y b lo dejamos como si tuviera un coeficiente 1, porque a esta b le vamos a asignar un valor conveniente para que luego se eliminen los denominadores, en caso de no tenerlo se le puede dar el valor de 1.

22. P: En este caso ¿podías haber dado otro valor? Decidiste darle el valor 13

23. E: Sí

24. P: ¿Como cual?

25. E: No se a lo mejor 26, lo que yo trataba en manejar la conveniencia de quitar ese 13 para ahí, pero sin embargo si yo hubiese querido poner 2/3 igual hubiera sido valido el trabajo algebraico cambiaria

26. E: Luego solo sustituimos en la ecuación de la recta recordando que la ecuación era p_1 un punto por donde pasa la recta lamba y lo que es los números directores de esta recta que pertenece al plano, en este caso lo hallamos con el sistema

27. E: Hay que recordar que tenemos tres formas de ecuaciones y también podíamos trabajar la ecuación paramétrica que realmente era un despeje en términos de una variable, se tomaba x el punto y el producto de eso por lambda

28. P: Aquí en la ecuación vectorial dice P igual 6, -1, 3 más lambda –62, 13, 11. ¿qué significa lambda?

29. E: Voy a contradecirme, lambda es un factor de proporcionalidad que yo voy a asignar sin tener realmente un valor definido propiamente, y todo aquel valor que entre aquí me va arrojar las ecuaciones de un vector que esté por el plano y que cumpla todas las características que se han dicho anteriormente. Es un factor de proporcionalidad que nosotros mismos fijamos.

30. P: Y P ¿qué significa?

31. E: P es la ecuación de la recta por así decirlo [...]

32. P: P ¿es [...]?

33. E: Digamos que es una letra, que igual puede ser a, b o c que se va a referir o nos va a denotar lo que es la ecuación de la recta.

34. P: Regresado al factor de proporcionalidad, ¿va a tener algunos valores específicos?

35. E: Siento que no, si mal no me equivoco lo que trabajábamos eran planos infinitos no se encuentran limitados entonces el factor de proporcionalidad no oscila entre ciertos valores, un valor que yo le asigne me va arrojar siempre un vector que pertenezca siempre a ese plano.

36. P: Entonces ¿lambda pertenece algún conjunto de números?

37. E: ¿Se refiere a los naturales, enteros?

38. P: Sí

39. E: No realmente pienso que no, cualquier valor que pertenezca a los reales se asignaría a esos valores, estamos en R^3

40. P: Entonces, ¿lambda pertenece a los reales?

41. E: ejum

42. P: Retomando algunas preguntas 6, -1, 3 ¿qué es?

43. E: Es el punto por donde pasa la recta

44. P: Y ¿-62, 13, 11?

45. E: Son los números directores del vector que pasa que se encuentra contenido en ese plano, con todas las características

46. P: ¿Qué plano?

47. E: Bueno es la recta, a ver [...] sí es la recta paralela a los planos

CASO 3: CARLOS

Exento la asignatura con 97 puntos, no presento el ordinario y aprobó los tres parciales.

1. P: Cuéntanos ¿qué fue lo que hiciste?

2. E: Para empezar nos dice que tenemos que hallar las ecuaciones de la recta que pasa por un punto el cual nos están dando y que es paralela la recta que vamos hallar a dos planos que en este caso nos están dando las ecuaciones [...] ahora, pero para empezar tenemos que hallar los vectores de dirección de los planos, ¿son vectores o números? No me acuerdo exactamente que son, con tal que son los coeficientes que lleva cada una de las ecuaciones en este caso es el número que están multiplicando a x, y, z entonces agarramos y formamos una terna, si es positivo, positivo si es negativo, negativo.

3. P: Esos vectores me dices ¿qué son?

4. E: Los vectores de dirección, los que me determinan hacia donde va el plano

5. E: El del primer plano lo llamé "a" y del segundo plano lo llamé "b", en este tercer plano lo llame "c", ¿por qué? Porque me está diciendo que a recta que tengo que encontrar es paralela a esos dos planos, y por lo tanto hay un teorema que dice que una recta determina un plano en el espacio entonces yo puse como c igual a c_1, c_2, c_3 son números de dirección que yo no conozco.

6. E: Ahora, por ser paralelas hay una propiedad que dice que el producto punto de dos vectores de dirección es cero, entonces agarre los vectores de dirección del primer plano y los multipliqué por los del tercer plano, en este caso c_1, c_2, c_3. Multipliqué x por x, y por y, z por z, en este caso sería 2 por c, 7 por c y 3 por c. Lo mismo hice para el segundo plano, b por c igual a cero, multipliqué y llegué a dos ecuaciones.

7. E: Esas dos ecuaciones, pues tengo que saber su valor de los números de dirección [...] de los vectores de dirección que me hace falta. Entonces por ser un sistema de ecuaciones resolví por cancelación y llegué al valor de c_1 y c_2 en términos de c_3

8. E: Y teniendo mis valores me fui al vector de dirección del plano que estoy buscando y sustituí cada uno de esos valores, como me quedo todo en términos de c_3 yo puedo despejar c_3, en este caso yo despejé c_3 y ahora solo que me quedan números, pero como me quedan

números con fracción puedo yo multiplicar para que se me cancelen, multiplicar y dividir para que no se me afecten

9. E: Tenemos por ecuación de la recta en el espacio que es P igual a P_1, que es en este caso el punto que me están dando, más lambda que es un valor que se le da, es una constante que se le da, por el vector de dirección, este vector de dirección que voy a utilizar es el que acabo de encontrar de la solución de las ecuaciones de las rectas paralelas.

10. E: Entonces primero dejé la ecuación vectorial que solamente sustituye el punto que me están dando desde el principio más lambda por el vector que tengo que acabo de encontrar.

11. E: Ahora como son tres tipos de ecuaciones, pues la primera es la vectorial, la segunda es la paramétrica, en que consiste la paramétrica en que después de que se resuelva todo, en que nosotros resolvemos 6 mas lambda por menos 6, pues nos va a quedar en términos de x, x los números de x son 6 menos 6 lambda, yo puedo igualo x, y, z son lo valores que tiene cada uno

12. E: Ahora la ecuación simétrica como se saca, como lambda es una misma constante que no cambia en ninguna de las tres ecuaciones paramétricas puedo despejarla. Como lambda es igual a las otras lambdas yo puedo igualarlo y me queda como una proporcionalidad como este es a este, este es a este y este es a este, y por una transitiva tomamos que todo es igual

13. P: Repasando, de cada uno de los planos proporcionados obtienes un vector, a este vector ¿le llamas?

14. E: Vector de dirección

15. P: ¿Por qué recibe este nombre?

16. E. Porque es la dirección que toma una recta que esta contenida en el mismo vector y abre hacia ese sentido, como que me determina los puntos por donde pasa el plano

17. P: Este vector que tomaste del primer plano, o sea, el vector 2, 7, 3 ¿pertenece al plano?

18. E: Sí

19. P: Este vector a, que me dices que pertenece al plano 1, lo multiplicamos con el vector c, este vector lo estas buscando. ¿Por qué me va a dar cero cuando hago el producto punto del vector a con el vector c?

20. E: Por ser paralelas, hay una propiedad que dice que por ser paralelas su producto punto es cero, si fuesen perpendiculares tal vez seria su producto cruz.

21. P: Luego conformas un sistema de ecuaciones, resuelves c_1 y c_2 en función de c_3, le das un valor a c_3, en este caso decidiste darle un valor de 11, y ¿le puedo dar otro valor?

22. E: Sí, le puedo dar valor de 22, el chiste de esto es que queremos eliminar las fracciones que a muchos nos causa dolor de cabeza, tratar de eliminarlas y que solo queden números enteros

23. P: Dame otro ejemplo, ¿qué otro valor le pudiste haber dado?

24. E: 33, números divisibles entre 11

25. P: Ahora, presentas la ecuación vectorial de la recta que dice P igual a P_1 más lambda multiplicada por el vector a,

26. E: El vector de dirección

27. P: Eso te iba a preguntar, a es un vector de dirección, ¿P_1?

28. E: Es un punto por donde pasa el vector de dirección, por donde va a pasar el plano, por donde va a pasar la recta que estoy buscando

29. P: Y ¿el vector de dirección, pasa por ese punto?

30. E: Sí

31. P: Lambda, ya dijiste

32. E: Es una constante, en todos va a ser igual, no se le da otro valor mas que lambda

33. P: Pero, ¿puede tener un valor específico? ¿O muchos?

34. E: Pues sí puede ser muchos, pero como que nos afectaría el resultado de la ecuación, nos daría números y nosotros lo que queremos son ecuaciones, por eso esa lambda no se le da valor es una constante

35. P: Lambda esta operado con el vector de dirección, que efecto tiene cuando lo efectúo, ¿qué operación está realizando?

36. E: Una multiplicación

37. P: Y ¿qué efecto tendría lambda sobre el vector de dirección?

38. E: Como que me lo aumenta, conforme vaya aumentando lambda va aumentando, como que proporcionalmente si uno aumenta el otro también

39. P: Y ¿P, que significado tiene?

40. E: P sería la recta que pasa, P ya sea la recta o el plano que conforma la recta.

41. P: A partir de esta ecuación vectorial ya puedes dar las ecuaciones paramétricas y las simétricas.

42. E: Sí.

CASO 4: NORMA

No presentó el ordinario

1. P: Platícanos ¿qué fue lo que hiciste?
2. E: Primero saqué lo que viene siendo los números directores de cada uno, de cada una de las rectas
3. P: ¿De las rectas?
4. E: Sí

5. E: Entonces se sacamos los directores, le puse e al primero que viene siendo que tiene como números directores 2, 7, 3 y b 1, -2, 3
6. P: ¿8, no?
7. E: Ah sí, perdón 8
8. P: ¿De dónde tomas esos?
9. E: De las ecuaciones de las rectas
10. P: ¿Son rectas?
11. E: Ah perdón son planos, son dos planos y les vamos hallar los números directores que nos van a servir para hallar las ecuaciones.
12. P: Este número director ¿qué significado tiene? ¿Cómo lo obtenemos?, estos números ¿de dónde salen?
13. E: De los coeficientes de la recta, de los coeficientes que tiene los planos, como el que dice aca 2x+ 7y los coeficientes son los que vamos a agarrar como números directores
14. E: Tenemos el vector a, que viene siendo un vector de dirección vamos a darle como a_1, a_2, a_3.
15. E: Tenemos el producto de e y b que viene siendo otros vectores, es cero
16. P: ¿Por qué es cero?
17. E: Esten, no me acuerdo, pero solo tenemos en cuenta que el producto punto de dos planos es cero, es igual a cero
18. E: Entonces nosotros vamos a multiplicar cada uno de los vectores por el vector de dirección que es a_1, a_2, a_3 el cual al multiplicarlo me va a dar una ecuación en términos de a_1, a_2 y a_3. Lo mismo que en el otro, entonces al tener las dos ecuaciones en términos del vector de dirección resolvemos el sistema de ecuaciones.
19. E: Al resolver el sistema de ecuaciones, vamos a hallar los valores de a_1 y a_2 entonces lo que nosotros vamos a hacer es sustituir el vector a en términos de, al resolver la ecuación nosotros vamos hallar los valores en términos de a_3
20. P: Puede ser en términos de otra componente o tiene que ser en términos de a_3
21. E: No, puede ser de otra componente, entonces hallamos a_1 en términos de a_3 y a_2 en términos de a_3
22. E: Entonces sustituimos los valores de a_1, a_2 en la ecuación o sea en el vector de dirección, ya que resolvimos las ecuaciones a1 nos quedo –62/11a3, eso es el valor que, en vez de que yo ponga a1 voy a poner ese es el valor y lo mismo que a2 no voy a poner a2 sino su valor sino y a3 se queda como está
23. E: entonces tenemos que a va a ser igual a, ya sustituido los valores va a quedar en términos de a_3, entonces factorizamos a_3, para que nosotros desaparezcamos a_3 le vamos a dar un valor porque aquí como nosotros vemos nos queda fracciones y para que nos quedes términos lineales ya así sin fracciones, le damos un valor, para que nosotros

desaparezcamos a_3 le damos un valor que para que al multiplicarlo, como nosotros factorizamos eso queda multiplicando los demás términos,

24. E: Entonces le damos un valor de 11, para eliminar las fracciones que están entre 11, lo multiplicamos y nos quedan ya fracciones lineales, solo en coeficientes.
25. P: Y necesariamente ¿tenía que haber sido a_3 igual a 11 o puede ser otro valor?
26. E: Puede ser otro valor, pero como vemos que es 11 ya sea por otro numero que sea divisible entre 11 para eliminarlo por ejemplo 22, 66 números que sean múltiplos de 11, para poder terminarlo y ya que no queden fracciones
27. P: Continuando
28. E: La ecuación vectorial se haya es P igual P mas lambda por el vector, como ya tenemos el vector solo sustituimos el punto, el punto ya nos lo dan es a_1, a_2, a_3 es el punto que ya nos los dan x_1, y_1, z_1 son los puntos. Entonces ya nos dan el punto, lambda la dejamos así y sustituimos el vector de dirección ya con los valores
29. E: Entonces realizamos el producto de lamba por los coeficientes, por los números y después realizamos la suma y eso va a ser nuestra ecuación vectorial
30. P: Continuamos
31. E: Para hallar las ecuaciones paramétricas es despejar x, o sea es hacer x igual a 6 menos 62 lambda, o sea x va a ser a la suma de 6 menos 62 lambda
32. P: ¿Por qué multiplicar por eso?
33. E: Es una formula que tenemos donde va a ser x va a ser igual a x más lambda por el numero que nosotros, porque al resolver lo que los números ya encontrados del vector de dirección ya multiplicado por lambda entonces nos va a quedar en términos de lambda entonces x va a ser igual a x, porque el P es igual a x, y, z, va a ser x mas un numero y lambda
34. P: P me dijiste esta (señalando la ecuación vectorial)
35. E: Sí, digamos P es esto y este podemos decirle P_1 es este para no revolvernos (de la ecuación vectorial $P = P_1$...)
36. E: P_1 va a ser nuestro punto que nos dan x, y, z
37. E: (Continuando con las ecuaciones paramétricas) entonces y es lo mismo, cómo son con x, son sumas, que se van hacer, como es una suma, x con x, y con y, y lo mismo con z, z con z. Esas son las ecuaciones parametricas
38. P: Estas x, y, z ¿tiene algo que ver con P?
39. E: Digamos que [...], serian los valores de cada una de x, y, z. Digamos que es como esta P sería estas tres variables y hallamos sus ecuaciones con respecto a la suma con respecto al punto y a los que resolvimos con el vector de dirección
40. P: Entonces ¿sí tiene que ver?
41. E: Sí, claro que sí

42. P: Entonces ¿sería una igualdad?
43. E: Seria una igualdad por ejemplo aquí vimos que estamos resolviendo las x con x , y con y. Como el punto es x, y entonces en vez de P podemos poner x, y, z
44. P: ¿Cómo lo pondrías?
45. E: (escribe......)
46. P: Continuando
47. E: Las ecuaciones simétricas las vamos hallar despejando lambda y las vamos a igualar, o sea x y z las vamos a igualar pero vamos a despejar lambda
48. E: Entonces lambda en x, como esta multiplicando a un número al pasarlo del otro lado, o sea despejando, o sea en la ecuación, x igual 6 menos 62 lambda, nosotros pasamos el 6 primero del otro lado nos quedaría x menos 6 igual a menos 62 lambda, entonces para dejar solo a lambda el otro lo pasamos como esta multiplicando lo pasamos dividiendo y esa va a ser nuestra ecuación de lambda, lambda va a ser x menos 6 sobre menos 62, y así de la misma manera lo vamos a ser con y z pero como x, y, z los vamos a igualar pues nos va a quedar despejado las lambda, una vez que este despejado los resultados que nos den son los que vamos a igual y así obtenemos las ecuaciones simétricas.
49. P: Una pregunta, en la expresión P igual a P_1 más lambda multiplicando al vector a, ¿qué significa ese P_1? ¿Cómo le llamamos a esa expresión?
50. E: Es la ecuación vectorial
51. P: ¿De quién?
52. E: De [...] de los planos, de los planos que [...] de las dos rectas que tuvimos de los planos, de los planos que nos dieron, para hallar su ecuación vectorial. Es de esa forma
53. P: Entonces ¿es la ecuación vectorial de […] ?
54. E: De los planos
55. P: En donde P_1, ¿qué es?
56. E: Es un punto que nos dan, por el cual es donde pasa el plano, donde pasan los planos, ese punto ya nos lo dan
57. P: ¿Y a?
58. E: Es el vector de dirección
59. P: ¿De quién?
60. E: De [...] del vector de dirección que nosotros vamos a hallar
61. P: Y lambda, ¿qué es?
62. E. ¿Lambda? creo que viene siendo como un ángulo, un ángulo el cual nosotros [...], ese casi mayormente no [...] hallamos su valor ya a lo último en la ecuaciones simétricas, las ecuaciones van a ser su valor de lambda
63. P: ¿Qué operación esta haciendo lambda a a?
64. E: Multiplicándolo, es un producto

65. P: Lambda ¿es un número o es un vector?
66. E: Es un número
67. P: Y a es un vector, lo esta multiplicando, ¿qué efecto produce?
68. E: Digamos que sería un vector por un escalar
69. P: Y ¿qué resultado obtenemos de eso?
70. E: ¿Un vector por un escalar? [...] creo que nos da una, no me acuerdo como se dice pero si vimos algo parecido a ello, es producto escalar, así se le dice producto escalar
71. P: A ver, cuando sumo un numero real con un numero real ¿obtengo?
72. E: Un número real
73. P: Cuando sumo un vector con un vector obtengo
74. E: Un vector
75. P: Acá estoy multiplicando un escalar con un vector, ¿será que me de un escalar o que me de un vector?
76. E: No me acuerdo muy bien, pero me imagino que me daría algo relacionado con un escalar al estarlo multiplicando
77. P: P_1 dijimos que es un punto, y ¿P qué es?
78. E: Sería el valor que le estamos dando a esa variable
79. P: Variable, ¿cuál variable?
80. E: La P
81. P: ¿P va a ser variable?
82. E: ejem
83. P: Y ¿de qué depende esta P?
84. E: Del valor que le demos a lo de la ecuación
85. P: Valor que le demos ¿a quien? ¿P_1 lo conozco?
86. E: ejeum
87. P: ***a*** ¿lo conozco?
88. E: a lambda, del valor que le demos a lambda
89. P: Entonces ¿depende de lambda?
90. E: [...] no recuerdo muy bien [...]
91. P: Retomando, al principio obtienes e y b vectores que obtienes de los coeficientes del plano, ¿estos vectores como los llamaste?
92. E: Vectores [...]
93. P: ¿Vector de dirección del plano?
94. E: A, los otros son los otros vectores que nos van a servir, pero el que nosotros el que le dije a es el vector de dirección
95. P: Y b, lo obtuve del segundo plano, ¿pertenece el plano 2?
96. E: ¿Al plano 2?

97. P: Sí, al segundo plano?

98. E: No, al segundo plano, si son dos planos, sí

99. P: ¿Este está en el plano 2?

100. E: Sí

101. P: e esta en el plano 1?

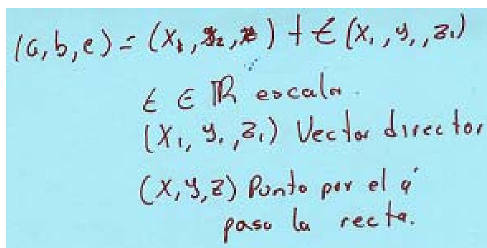
102. E: Sí, en el plano 1

ANEXO B

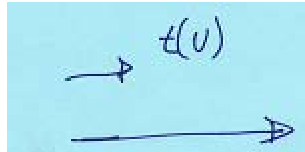
SEGUNDA ENTREVISTA

ENTREVISTA CON DAMIAN

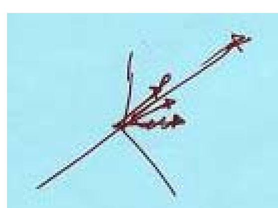
14. E: Recuerdas ¿cómo es la expresión que representa la ecuación vectorial de la recta?
15. D: Esten, me parece que era […] la ecuación de la recta va a ser igual a un punto, o sea te dan un punto por el que pasa la recta y un vector director, t veces que es un escalar del vector director de esa recta.
16. E: ¿puedes escribir esa información?
17. D: a, b, c igual a x, y, z […] estas son diferentes de x, y, z donde t pertenece a los reales porque es un escalar y x_1, y_1, z_1 es un vector director; x, y, z es un punto por el que pasa



18. E: En este caso […] acá indicas que x, y, z es el vector director, realmente ¿qué papel está haciendo? ¿Qué hace ese vector?
19. D: Da la dirección del punto, la dirección a la cual esta la recta
20. E: La dirección a la cual va la recta.
21. D: O sea, a donde se dirige
22. E: x, y, z es un punto donde pasa la recta.
23. D: Donde pasa la recta
24. E: Me dices que t es un escalar
25. D: Es un escalar
26. E: ¿Qué hace t en esta expresión?
27. D: Lo que pasa esta recta va a ser, o sea, el vector director puede ser […] no sabes de que tamaño va a ser, entonces esa recta va a ser el vector director que mayormente es mas pequeña entonces la va a multiplicar, o sea va hacerla crecer digamos a ese vector
28. E: ¿Puedes mostrarlo gráficamente?
29. D: Por ejemplo, si […] este puede ser un vector, el vector v […] pero si lo multiplicamos t veces por un escalar, como que se va a ser mas grande el vector



30. E: Entonces este escalar afecta al vector director
31. D: Sí al vector director
32. E: Este resultado de t por el vector dirección, ¿que obtengo en esta expresión?
33. D: Un vector
34. E: ¿Y esto?
35. D: Es un punto por el cual pasa el vector
36. E: Y ¿que operación tenemos acá?
37. D: Es suma
38. E: Entonces ¿puedo sumar un punto con un vector?
39. D: O sea, lo que pasa esto está dado para la […] que utilice el método del paralelogramo. Entonces por eso está representado de esa forma, porque tienes un punto y aquí es el vector director entonces la recta va
40. E: ¿Cómo sería gráficamente?
41. D: O sea, estamos hablando de R^3, uno tiene un punto cualquiera… que es este y un vector director, este. Entonces, mayor […] el vector director tiene que estar en la dirección del punto […] entonces esto esta mal […] no aquí el vector director entonces t veces este vector nos quedaría algo así […] Y el punto es un punto por el que pasa el vector director, perdón la recta ahora estamos hablando de la recta



42. E: En otra hoja pinta con un color el vector dirección y con otro color el punto
43. D: Ok
44. E: Este punto, ¿cuál punto es?
45. D: Es un punto cualquiera […] este es un punto cualquiera
46. E: De acuerdo

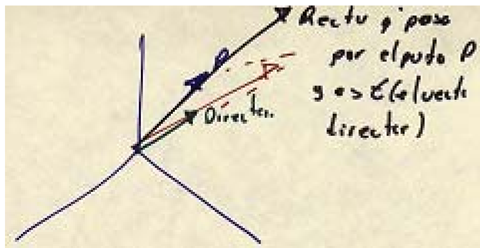
47. D: El vector director se supone que está dirigido en la misma dirección del punto para que pase por ese punto

48. E: ¿El vector dirección pasa por el punto?

49. D: Ajá […] tiene que pasar por el punto

50. E: ¿Cómo utilizamos el método del paralelogramo?

51. D: Porque, […] es que de eso no me acuerdo muy bien. Pero no me acuerdo si estaba en el mismo punto o en el otro, entonces si está en el otro pues la suma […] la línea que […] iba […] sería la que iría al origen sería la suma de estos dos no […] y ya pues por el método del paralelogramo sería así […] esta sería la suma de estos dos



52. E: ¿Que pasa?, lo sumo y ¿que más?

53. D: Nada mas […], es que no me acuerdo muy bien de la ecuación, o sea, sí de la ecuación sí me acuerdo bien. pero muy bien, me acuerdo que este era un vector director por la que da dirección de la recta y que este era un punto por el que pasaba la recta, dada la ecuación de la recta. O sea, no me acuerdo muy bien como salía la ecuación

54. E: Algunos aspectos que comentas son que el vector dirección tiene que pasar por donde pasa el punto

55. D: La línea, la recta […] la recta tiene que pasar por el punto

56. E: Según lo que dibujaste, el punto y este vector dirección […] ¿cómo sería la recta?

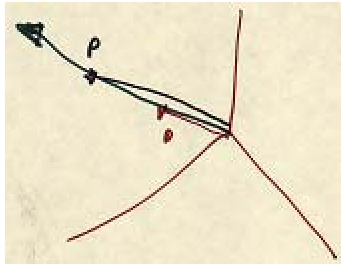
57. D: Pasa acá, pasa por el punto y en dirección con el vector dirección

58. E: Si te pido que lo marques con este color

59. D: Ha, ¿la recta? […] pasa por el punto […] por el punto p y es t veces el vector director

60. E: ¿Cómo puedes asegurar que es esa la recta y no por otro lado? Si yo te digo aquí

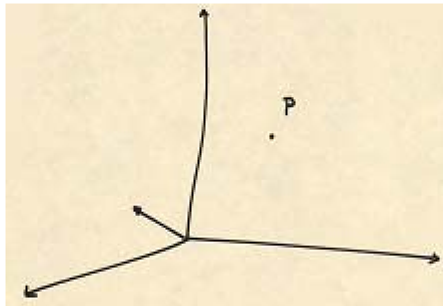
61. D: Ah, porque el vector director lo dibujamos de manera que para allá vaya la recta, o sea, por eso es el director porque es el que da la dirección de la recta […] porque por ese punto hay infinidad de rectas que van a pasar por allá



62. E: En este caso, ¿el vector dirección parte del origen?
63. D: Sí
64. E: Este es un punto y ¿este?
65. D: Es un vector que va del origen al punto
66. E: ¿Cómo le llaman a éste vector ustedes?
67. D: ¿Qué va del origen al punto? […]
68. E: ¿No recuerdas?
69. D: Vector […] no recuerdo
70. E: La recta dirías que ¿pasa por el origen?
71. D: Parte del origen
72. E: Esta recta ¿Cómo la estamos formando? ¿cómo se logra integrar esta recta?
73. D: Pues con un punto por el cual va a pasar la recta y un vector director que nos va a dar dirección de la recta […] y pues el director pues es más pequeño
74. E: ¿Más pequeño que quien?
75. D: Que la[…] que la línea[…] que la recta en el espacio […] o puede ser, o sea de hecho esta puede ser más chica no […] sí porque como el escalar puede ser una fracción también podría ser más pequeña también
76. E: ¿Esta recta está conformada de que elementos? ¿cómo se conforma la recta?
77. D: No entiendo la pregunta
78. E: Acá de me dices que t es un escalar que afecta al vector director, t ¿cuántos valores puede tomar?
79. D: Infinidad de, cualquier valor
80. E: ¿Eso afectaría a la recta?
81. D: Sí pues en su magnitud… sería es más grande, mas corta la recta […] a ver […] no de hecho […] afectaría en el sentido de que tendría que pasar por un punto pero la recta se puede […] se puede continuar indefinitiva o sea al infinito, pues o sea no hay un límite pues para esa recta solo que pase por ese punto y esa dirección. Entonces puede tomar cualquier valor […] lo que sí pide es que pase por ese punto y que vaya en esa dirección
82. E: ¿Podrías darme otro ejemplo? con otro punto y otro vector dirección y la recta que se generaría

83. D: El vector que va del origen a punto, […] este sería el vector director, aquí pasa por el punto y tiene la dirección del vector director

84. E: Si consideramos este punto y este vector, ¿se podrá trazar una recta con estos dos?



85. D: Que vaya, que tenga la dirección […] pues no porque […] podríamos trazar una recta que tenga la dirección del vector director pero no pasaría por el punto

86. E: Ahora retomando lo que escribiste acá la ecuación vectorial de la recta y retomando los elementos que plasmaste: este es un punto, este es un escalar, este es el vector dirección y esto ¿qué es?

87. D: Es la ecuación de la línea, de la recta pues en el espacio

88. E: Diría que esta es la ecuación o toda

89. D: Estamos diciendo que la recta va a ser igual a esto (señala el segmento), o sea, esta es la ecuación. De hecho de ahí se derivan que si las ecuaciones paramétricas y no se qué, hay varias formas

90. E: Entonces, éste es un punto, un escalar y un vector.

91. D: Si

92. E: Y, ¿este punto lo puedo sumar con este vector?

93. D: O sea, sus componentes […] si estamos hablando de sus componentes sí, podemos multiplicar por las operaciones que conocemos nosotros en vectores pues primero multiplica el escalar por cada componente y luego cada componente se suma, por ejemplo sería x más x_1 t coma y_2 más yt, o sea sus componentes son las que se pueden sumar. Un punto más un vector, pues no

94. E: No lo podemos sumar. ¿y cómo se relaciona este punto, que nos pusiste acá, con lo que tenemos de este lado? Acá, diste un punto y ¿acá que tenemos?

95. D: Aquí dimos un vector que va del origen al punto

96. E: ¿Conoces esta expresión?

$$P=\{P_0+\lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

97. D: Sí [...] es lo mismo, es P que es la recta en el espacio, es P_0 este un punto cualquiera mas lambda veces, porque sí ahora que me acuerdo siempre se ponía en la ecuación del vector lambda, pero puede ser cualquier letra mientras que tu digas que es un escalar casi siempre el vector director sea con a o b o c mayormente, o sea los reales es lo mismo que puse ahí

98. E: Suponiendo que estamos trabajando en el plano, ¿podías representarme lo que obtengo de esta expresión en el plano? O sea, dar un caso particular para esta expresión: un punto, un vector

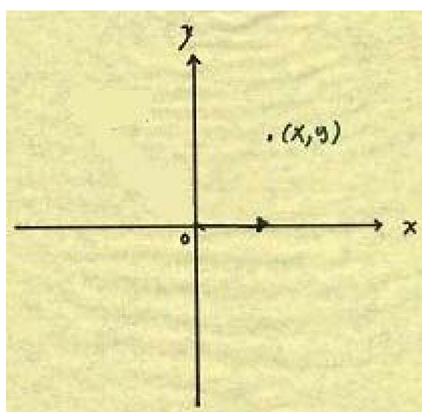
99. D: Pues podríamos dar una que este sobre el eje x o sobre el eje y, porque un punto pues puede ser cualquier punto de x, por ejemplo en este caso el vector director pues seria i que son los vectores unitarios, podría ser eso [...] y pues lambda veces ese vector siempre va a estar sobre la [...] sobre el eje x, pues un punto en x pues vamos a dar cualquier punto en x. lo mismo sería para y

100. E: Pero ¿en el plano cartesiano?

101. D: En el plano cartesiano [...] pues si lo tomamos así como yo lo veo, pues sí lo podemos dar

102. E: Por ejemplo

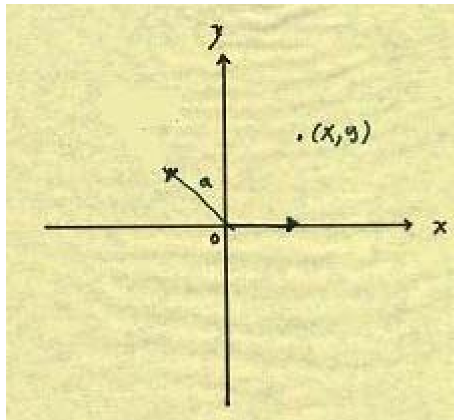
103. D: No se un punto por acá, un punto x y.



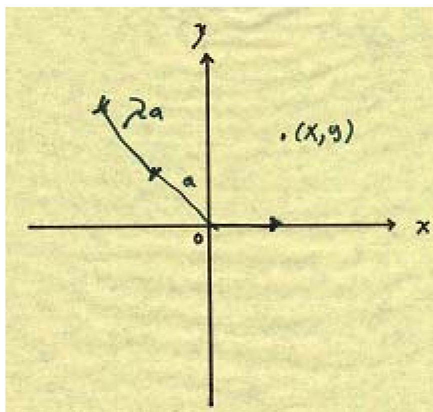
Ahora a [...] es cualquier vector

104. E: Por ejemplo

105. D: Lo podemos pensar por acá [...] este sería el vector



y estoy suponiendo que este escalar es positivo pues lambda veces a sería por acá […] sí aunque también lo podríamos haber pasado para acá, es indiferente



106. E: Según este vector y este punto, ¿podemos trazar una recta?
107. D: Ah, en este caso no, por como di la dirección del vector.

ENTREVISTA CON ADRIAN

1. E: ¿Cómo es la ecuación vectorial de la recta?
2. A: La ecuación de la vectorial de la recta, bueno pues, me acuerdo que, desde anterior desde la prepa, la ví como una ecuación donde tiene coeficientes en términos de a, b y la constante que es independiente de los términos
3. E: ¿Nos escribes eso?
4. A: Sí claro, por supuesto, me acuerdo que para dos planos, o sea un plano xy, sin la coma claro sería de la forma Ax + By + C = 0 y donde representaba una recta en el plano coordenado xy

Plano: x, y.

$$Ax + By + C = 0$$

5. E: Ahora ya estudiaste en el primer semestre de la licenciatura geometría analítica
6. A: Si
7. E: Un semestre, y ahí estudiantes en tres dimensiones
8. A: Si
9. E: Te acuerdas como era esa expresión
10. A: Si, era Ax mas By no me acuerdo la letra de este coeficiente pero tenia un término en z, no se creo que era F, D no me acuerdo muy bien, pero no importa y el término independiente le podemos llamar C y ya representaba una recta en el eje x, y y z

Plano: xyz.

$$Ax + By + Fz + C = 0$$

11. E: Esta es la ecuación de la recta en tres dimensiones?
12. A: En el plano xyz
13. E: Y cuando te pido la ecuación vectorial de la recta, es la que acabas de escribir?
14. A: Eh, no me acuerdo muy bien, pero me imagino que si. Pero vimos varias definiciones de ecuaciones vectoriales de la recta igual distancia de un plano y que si dos planos igual se intersecan su corte es la recta. Tal vez si repaso un poquito sí me puedo acordar, pero sí también había otra, no porque había otra, sí ya me acordé era una donde había con diferencia de puntos pero no es esta.
15. E: Dirías que esta expresión ¿es la ecuación vectorial de la recta?

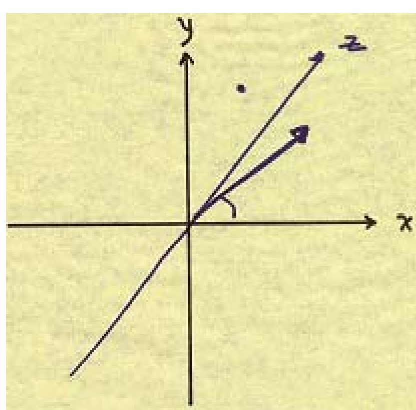
$$P = \{P_0 + \lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

16. A: Si, es esta
17. E: Así tal cual la viste en tu curso o ¿viste alguna forma parecida?
18. A: Vimos varias formas, pero en definitiva esta es la primordial de la ecuación vectorial de la recta
19. E: Vamos a trabajar con esta, ¿Cómo interpretas esta expresión?
20. A: ¿Esta expresión? Bueno pues lo que veo acá es que esto parece un conjunto, un conjunto de ecuaciones vectoriales de recta, que por ejemplo esta P_0 creo que es la

diferencia de los puntos de valor absoluto no me acuerdo muy bien, pero el caso es que la lambda es como una constante pero puede ser cualquiera que pertenece a los reales y a no me acuerdo muy bien que era, pero si es como varias […] varios conjuntos de recta que llevan una misma línea o algo por el estilo pero es un bloque de ecuaciones vectoriales de recta

21. E: Esto ¿lo podemos expresar en un plano xy, en dos dimensiones?
22. A: Si, z estaría por aquí
23. E: Bien, si quieres vamos a dibujar z
24. A: Bueno algo así
25. E: Vamos a tratar de representar el lugar geométrico que se describe acá, crees poder hacerlo
26. A: ¿El lugar geométrico?
27. E: Sí de lo que se describe
28. A: No, pues sinceramente no me acuerdo muy bien como lo representaba
29. E: Me dices que P es un conjunto
30. A: Si
31. E: Este conjunto, ¿que tipo de elementos contiene? Según lo que se describe
32. A: Esto es, yo me acuerdo, bueno de lo que recuerdo este […] esto es la diferencia de puntos este es el punto director no me acuerdo muy bien, este puede tomar cualquier valor y este creo que era un punto o un punto de la recta o un punto específico de la recta algo así
33. E: Esta lambda ¿puede tomar cualquier valor? ¿Cuántos valores puede tomar?
34. A: ¿Cuántos valores? Esta… habían tres formas, tres valores porque tenia fórmula en x, y y en z o sea que es en tres dimensiones y despejas y toma cada valor cada uno. O no, creo que era el mismo, si era el mismo porque para todos se cumple, sí era el mismo. Sí porque todo se cumplía y era igual, es que no lo he estudiado, pero si, si, sí me acuerdo porque era de la misma forma, no me acuerdo si era x sobre […] lambda, x_1 mas uno o lambda mas x_2 o algo por el estilo, pero creo que toman el mismo valor
35. E: Te voy a tratar de recordar algunos elementos y te haré algunas preguntas. ¿P_0 es un punto donde pasa la recta?
36. A: Si
37. E: ¿Recuerdas el término vector dirección?
38. A: Si, el que, el que, creo ese es que se sacaba con la diferencia de los puntos. De un punto y era el que tenia dirección del vector
39. E: Es este de acá
40. A: Ah, ok
41. E: ¿Si recuerdas?

42. A: Sí
43. E: P_0 es un punto de la recta y este es el vector dirección
44. A: Sí es verdad, yo lo estoy confundiendo, si es cierto este es un punto de la recta , ese es el vector director y lambda es una constante
45. E: ¿Qué le está haciendo lambda a ese vector?
46. A: Mmj […] lo está […] haciendo que se proyecte […] hasta que tenga un cierto espacio más, por ejemplo si está por acá, no se, que tenga un, por mas de sentido por acá o hacia acá
47. E: ¿Puedes ahora describir geométricamente esto de acá?, ya te comente quien es P_0, quien es lambda perdón quien es a, el vector dirección
48. A: ¿Que lo describa geométricamente?
49. E: Que me des un caso particular un ejemplo de esta expresión
50. A: […] Si P_0 yo le doy un punto en xy, o sea 1,2,3 sería sustituir sus valores que yo sustituya un punto en tres direcciones y … un coseno director especifico, o sea dado, y lambda una constante -1 por ejemplo y así formaría la ecuación, es lo que me está dando a entender
51. E: Dibuja un vector
52. A: ¿Un vector? … dibuja
53. E: Elige un punto cualquiera, dibuja un punto
54. A: ¿Cualquiera?
55. E: Si
56. A: O ¿que esté sobre el vector?
57. E: No, así por ejemplo, un punto fuera del vector.

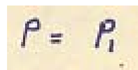


58. E: Con este punto y este vector ¿podemos trazar una recta?
59. A: […] Yo creo que sí
60. E: ¿Cómo sería, suponiendo que este vector es el vector dirección y que este punto es P_0?

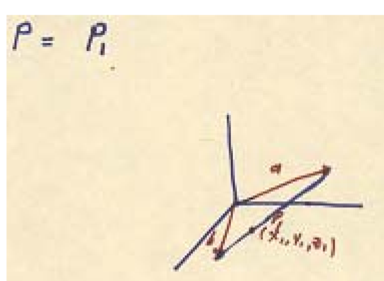
61. A: […]
62. E: Si ésta es la ecuación vectorial de la recta, entonces ¿que estaría ocurriendo dado este punto P_0 y este vector dirección?, ¿qué va a ocurrir según esta expresión?
63. A: […] ¿Según este punto y este vector? Yo tengo estos valores, sustituyo […]
64. E: ¿Recuerdas que hace el vector dirección en relación a la recta?
65. A: Le da sentido
66. E: Entonces, ¿cómo debería ser la recta?
67. A: Una recta hacia allá
68. E: Dibújalo, ¿cómo sería?
69. A: Es que no me acuerdo bien si pasaba por el punto, o no se realmente no me acuerdo. No se si se prolongaba o este punto necesariamente tendría que pasar por la recta, pero en definitiva […] no, no me acuerdo. Lo que pasa es que este punto no me queda claro, porque este es el coseno director entonces este le da dirección a la recta entonces si yo lo pongo en esta orientación entonces debe tener esta orientación pero no me acordaba si este punto tenía una relación, sí obviamente tiene relación pero no me acuerdo si se prolongaba de maneja perpendicular o paralela no me acuerdo, […] ok es que había muchas definiciones porque si era paralelas por ejemplo un punto paralelo a este y que su diferencia era esta pues era una recta paralela al vector. Cosas de ese estilo
70. E: Este es un vector, este es un punto. Piensas que ¿podemos efectuar una suma con estos dos elementos?, pensando que estamos trabajando en un sistema de ejes como el que está acá representado
71. A: Si, es eso
72. E: ¿Cómo puedo hacer esta suma? ¿Es posible sumar un punto y un vector?
73. A: Si, o sea creo que esa es la ecuación, porque esto es un punto, pero este es un punto de la recta […] y la suma creo que es esto y esto es la proyección del coseno director y si yo lo sumo creo que me va a dar la ecuación vectorial de la recta
74. E: Retomando, al principio comentaste que esto es un conjunto. Podrías decir si el conjunto ¿es finito o infinito?
75. A: ¿Es finito o infinito? […] Pues es una ecuación general debe ser infinito, yo que imagino que si, aunque no he escuchado que, bueno en geometría analítica, había un montón de ecuaciones vectoriales de la recta, habían paralelas perpendiculares pero nunca llegamos a escuchar en geometría analítica que esto sea finito
76. E: Entonces dirías que esto ¿es?
77. A: A mi manera de ver, […] porque cosenos director hay varios, o sea hay varios puntos, no se otros que vaya por acá y otro por acá

ENTREVISTA CON LIDIA

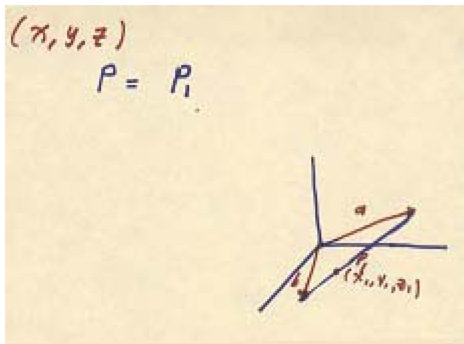
1. E: ¿Recuerdas la ecuación vectorial de la recta? ¿la podrías escribir?
2. L: […] Es el punto […] el punto por el que pasa […] y […] hay no recuerdo



3. E: Gráficamente, ¿cómo representaban, cuando estudiaron la ecuación vectorial de la recta, planteaban alguna cuestión gráficamente? ¿lo vieron en tres dimensiones, en dos dimensiones?
4. L: ¿En dos dimensiones? la ecuación de la recta
5. E: La ecuación vectorial de la recta
6. L: No […] ¿el plano cartesiano? […] pero
7. E: ¿En el espacio?
8. L: […] ¿Con tres dimensiones?
9. E: Si
10. L: […] El vector
11. E: ¿Quieres pintarlo de otro color? Este que dibujaste, ¿quién es?
12. L: La recta
13. E: La recta
14. L: Este es un vector, […] y este vector […] y con la diferencia se obtiene […] este otro vector […] y […] y […] no estoy muy segura si con un punto y este vector se puede
15. E: Un punto, ¿cuál punto?
16. L: Un punto que pertenezca a este vector
17. E: Por ejemplo, ¿me das uno?
18. L: A ver puede ser…



19. E: Entonces, comentas que tienes dos vectores de los cuales obtienes a través de su diferencia este vector y un punto sobre este vector, ¿para que me serviría este punto?
20. L: […] Serviría para […] o sea, para determinar la ecuación vectorial
21. E: ¿Tiene algo que ver con esto que ya pusiste acá?
22. L: Podría ser que como acá ya puse P_1, el punto un punto por el que pasa la recta
23. E: ¿Es éste de acá?
24. L: Si, y este sería pues x, y, z



25. E: Y esto, ¿quién es?
26. L: […] No se, para determinar la ecuación […] otro punto
27. E: Otro punto […] ahora me dices que tengo un punto que estamos llamando P_1 y plasmaste también dos vectores, ¿Cómo los estás relacionando? ¿Estas efectuando alguna operación entre a y b?
28. L: Una diferencia
29. E: Una diferencia, y esto ¿será parte de la ecuación vectorial de la recta?
30. L: Si […] pero[…] vendría siendo en esta parte, pero no estoy muy segura
31. E: En esta hoja hay una expresión, ¿te es conocida?

$$P = \{P_0 + \lambda a \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

32. L: […]
33. E: ¿Dirías que es la ecuación vectorial?
34. L: Si
35. E: Si te digo que es la ecuación vectorial, ¿podrías describirla? ¿cómo la interpretas?
36. L: […] Un punto P […] es igual a la suma de de otro punto P_0 más un vector multiplicado por un escalar lambda, tal que lambda pertenezca a los reales

37. E: ¿Te es conocido?, ¿algo similar trabajaste en clase?
38. L: […] Para sacar otras otros tipos de ecuaciones […] las simétricas y […]
39. E: Tal vez paramétricas
40. L: Ah, si
41. E: En esta expresión, me comentas que este es un punto dado, y ¿este vector quién sería?
42. L: […] La diferencia
43. E: ¿Qué operación estoy haciendo?
44. L: Adición
45. E: Este vector esta afectado por este escalar
46. L: Si
47. E: ¿Qué le hace este escalar?
48. L: […] Aumenta o disminuye […] su magnitud
49. E: Lo que obtengo ¿es otro vector?
50. L: Si
51. E: Este es un vector y este es un punto
52. L: Si
53. E: ¿Los puedo sumar?
54. L: […] No se […]
55. E: El hecho que el vector a este afectado por lambda, ¿cuántos elementos vamos a obtener, según esta expresión?
56. L: […] ¿los mismos que los reales?
57. E: ¿O sea?
58. L: […] Infinidad
59. E: Retomando, el esquema que presentas, dices que tenemos dos vectores hago la diferencia y obtengo este de acá, y luego ¿Cuál sería la recta?
60. L: Señala
61. E: Únicamente de acá
62. L: No porque ya depende del valor de lambda
63. E: ¿Recuerdas el concepto vector dirección?
64. L: […] No
65. E: ¿Vector de posición?
66. L: […] No
67. E: Acá estas trabajando en tres dimensiones, acá presento dos dimensiones, ¿será posible representar en este sistema bidimensional esta expresión?
68. L: […] Si
69. E: ¿Cómo sería?
70. L: […] ¿Igual hablando de la recta?

71. E: Si

72. L: […] Pues […] mmj […] ¿podríamos manejar también vectores?

73. E: Si

74. L: […] Establecer otros vectores como estos

75. E: Por ejemplo

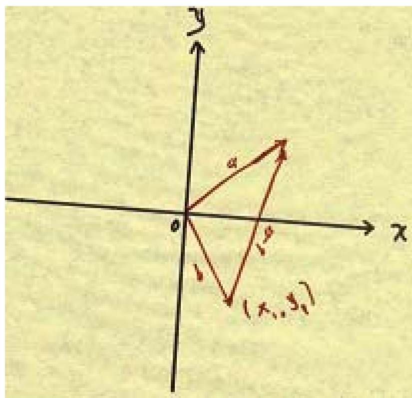
76. L: dibuja

77. E: Ahí tienes los dos vectores, ¿Qué más?

78. L: […] Igual con la diferencia

79. E: ¿Algo más?

80. L: […] solamente el punto que es con dos coordenadas



81. E: Eso sería trabajar en dos dimensiones